

Lösungsvorschläge für die Übungsaufgaben – Blatt 9

Zürich, 25. Januar 2006

Lösung zu Aufgabe 24

Zur Lösung dieser Aufgabe gehen wir wieder davon aus, dass es sich bei U um ein Minimierungsproblem handelt. Weiter sei I eine Eingabeinstanz für U und A ein Online-Algorithmus für U . Dann gilt stets $\text{Kosten}(\text{Lösung}_A(I)) \geq \text{Opt}_U(I)$.

Der Wert $\text{Kosten}(\text{Lösung}_A(I)) - \text{Opt}_U(I)$ beschreibt die Differenz der Kosten der berechneten Lösung und einer optimalen Lösung. Der Wert $\frac{\text{Kosten}(\text{Lösung}_A(I)) - \text{Opt}_U(I)}{\text{Opt}_U(I)}$ beschreibt nun den *relativen Fehler* der von A auf der Instanz I berechneten Lösung, also das Verhältnis zwischen der Abweichung vom Optimum und dem Wert des Optimums selbst. Die zusätzliche Multiplikation dieses Wertes mit 100 beschreibt dann also den relativen Fehler in Prozent.

Lösung zu Aufgabe 25

- (a) Wir betrachten eine Instanz des Blätter-Problems mit $k = 3$, bei der der Cache die Seiten 1, 2 und 3 enthält, und für die $I = (7, 9, 3, 2, 14, 8)$ gilt. Eine optimale Lösung für diese Problem Instanz sieht wie folgt aus:

$$1 \leftrightarrow 7, 7 \leftrightarrow 9, \bullet, \bullet, 9 \leftrightarrow 14, 14 \leftrightarrow 8$$

Diese Lösung hat Kosten 4, und es ist auch einfach zu sehen, dass es keine billigere Lösung geben kann: Da am Anfang die angefragten Seiten 7, 9, 14 und 8 nicht im Cache vorhanden sind, benötigt jede Lösung mindestens Kosten 4, um diese vier Seiten in den Cache zu holen.

- (b) Wir betrachten eine Instanz des Blätter-Problems mit $k = 5$, bei der der Cache die Seiten 1, 101, 1001, 1002 und 9 enthält, und für die $I = (1002, 7, 5, 1001, 101, 3, 8, 1, 1002)$ gilt. Eine optimale Lösung für diese Problem Instanz sieht wie folgt aus:

$$\bullet, 9 \leftrightarrow 7, 7 \leftrightarrow 5, \bullet, \bullet, 5 \leftrightarrow 3, 3 \leftrightarrow 8, \bullet, \bullet$$

Diese Lösung hat Kosten 4, und es ist auch einfach zu sehen, dass es keine billigere Lösung geben kann: Da am Anfang die angefragten Seiten 7, 5, 3 und 8 nicht im Cache vorhanden sind, benötigt jede Lösung mindestens Kosten 4, um diese vier Seiten in den Cache zu holen.

Lösung zu Aufgabe 26

Wir betrachten die Online-Strategie für das Blätter-Problem, die immer die Seite mit der kleinsten Nummer aus dem Cache entfernt. Wir nehmen an, dass $k = 4$ gilt, und dass der Cache am Anfang die Seiten 1, 3, 5 und 7 enthält.

Für die Instanz $I = (2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1)$ liefert diese Strategie die Lösung

$$1 \leftrightarrow 2, 2 \leftrightarrow 1, 1 \leftrightarrow 2, 2 \leftrightarrow 1, 1 \leftrightarrow 2, 2 \leftrightarrow 1, 1 \leftrightarrow 2, 2 \leftrightarrow 1, 1 \leftrightarrow 2, 2 \leftrightarrow 1$$

mit den Kosten 10.

Eine optimale Lösung für I wäre demgegenüber

$$3 \leftrightarrow 2, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet$$

mit Kosten 1.

Lösung zu Bonus-Aufgabe 10

Wir betrachten hier die Online-Strategie, die immer diejenige Seite aus dem Cache entfernt, die bisher am wenigsten nachgefragt wurde. Wenn mehrere solche Seiten im Cache vorhanden sind, dann wird diejenige mit der grössten Nummer entfernt.

- (a) Sei $k = 4$, der Cache enthalte die Seiten 2, 3, 4 und 5. Für die Instanz $I = (1, 5, 4, 3)$ liefert diese Strategie die Lösung

$$5 \leftrightarrow 1, 4 \leftrightarrow 5, 3 \leftrightarrow 4, 2 \leftrightarrow 3$$

mit den Kosten 4.

Eine optimale Lösung für I wäre demgegenüber

$$2 \leftrightarrow 1, \bullet, \bullet, \bullet$$

mit Kosten 1.

- (b) Sei $k = 5$, der Cache enthalte die Seiten 1, 7, 103, 5 und 9. Für die Instanz $I = (104, 103, 9, 7, 5, 105, 104, 103, 9, 7)$ liefert diese Strategie die Lösung

$$103 \leftrightarrow 104, 9 \leftrightarrow 103, 7 \leftrightarrow 9, 5 \leftrightarrow 7, 1 \leftrightarrow 5, 104 \leftrightarrow 105, 103 \leftrightarrow 104, 9 \leftrightarrow 103, 7 \leftrightarrow 9, 5 \leftrightarrow 7$$

mit den Kosten 10.

Eine optimale Lösung für I wäre demgegenüber

$$1 \leftrightarrow 104, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, 5 \leftrightarrow 105, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet$$

mit Kosten 2.