Online-Algorithmen für Paging

Leitprogrammartige Unterrichtsunterlagen für den Informatikunterricht ab der 9. Gymnasialstufe

Symbolbild, erstellt mit DALL·E 3

Semesterübung der Fachdidaktik 2 im Frühlingssemester 2024 an der ETH Zürich

Autoren: Dr. Nikolaus Mutsanas, Michael Hug

Betreuer: Prof. Dr. Juraj Hromkovič

Analyse des zu vermittelnden Stoffs und des benötigten Vorwissens

In dieser Unterrichtseinheit vergleichen wir das Offline- mit dem Online-Paging-Problem. Während das Offline-Problem eine eindeutige Lösung hat, die mit der LFU-Strategie («longest future distance») leicht gefunden werden kann, gibt es für das Online-Problem unterschiedliche Strategien, die jedoch keine Erfolgsgarantie haben. Wir untersuchen dabei die FIFO- («first in first out») und die LRU-Strategie («least recently used»). Um die Güte der Online-Strategien zu messen, führen wir das Konzept des kompetitiven Faktors ein. Beide der untersuchten Online-Strategien sind dabei strikt k-kompetitiv, wobei k die Grösse des Cache-Speichers bezeichnet.

Die Unterlagen richten sich an Klassen ab der Gymnasialstufe 9. Spezifisches Vorwissen aus dem Informatik-Unterricht ist im Prinzip für die Behandlung dieser Unterrichtseinheit nicht nötig. Der Schwierigkeitsgrad der Unterrichtseinheit ist jedoch abhängig davon, wie viel Erfahrung die Klasse damit hat, Tabellen für die Darstellung von Strategien (d.h. deren zeitlichen Verlauf) zu nutzen. Wir setzen darüber hinaus voraus, dass die Klasse damit umgehen kann, Elemente einer Menge (in unserem Fall unterschiedliche Buchtitel) durch allgemeine Symbole mit Indizes (in unserem Fall b_1, b_2, b_3, usw…) darzustellen. Zuletzt nutzen wir aus der Mathematik das Vorwissen über Parameter, um der

Grösse des Cache-Speichers durch einen Buchstaben einen festen, aber allgemeinen Wert zuzuweisen.

Leitidee, Dispositionsziele und operationalisierte Lernziele

Leitidee: Das Paging-Problem ist ein zentrales Problem, das an der Schnittstelle zwischen Hardware und Software angesiedelt ist. Weil Cache-Speicher, der mit der Geschwindigkeit des Prozessors mithalten kann, sehr teuer ist, muss auf der Ebene der Software entschieden werden, welche Speicherseiten im Cache-Speicher gelöscht werden, wenn zusätzlicher Platz benötigt wird. Am Paging-Problem kann der Unterschied zwischen einem Offline- und einem Online-Problem sehr gut aufgezeigt werden. Das im Online-Problem fehlende Wissen über zukünftig benötigte Speicherseiten führt dazu, dass eine optimale Lösung im Allgemeinen nicht möglich ist. Es können aber unterschiedliche Online-Strategien untereinander und mit der optimalen Lösung des Offline-Problems verglichen werden.

Dispositionsziel: Die Schülerinnen und Schüler erkennen in Online-Problemen eine spielerische Auseinandersetzung zwischen dem Datenstrom und dem Algorithmus, der den Datenstrom verarbeitet. In einem Wechselspiel versucht man zuerst eine Strategie vorzuschlagen, um sie danach durch unterschiedliche Datenströme zu testen und herauszufordern. Das Suchen von Datenströmen, an denen ein vorgeschlagener Algorithmus scheitert, ist eine zentrale Methode, um den Algorithmus zu verbessern bzw. seine Grenzen zu definieren.

Operationalisierte Lernziele: Die Schülerinnen und Schüler können…

- das Paging-Problem im Kontext der Buchhandlungen und im Kontext des Hardwaredesigns formulieren.
- kleine Instanzen des Paging-Problems in Tabellen darstellen.
- kleine Instanzen des Online-Paging-Problems mit der FIFO-Strategie lösen.
- für kleine Instanzen des Offline-Paging-Problems die optimale Lösung finden.
- worst-case-Szenarien für die FIFO-Strategie suchen.
- kleine Instanzen des Online-Paging-Problems mit der LRU-Strategie lösen.
- erklären, unter welchen Umständen die LRU-Strategie der FIFO-Strategie überlegen ist.
- den kompetitiven Faktor einer Online-Strategie für das Paging-Problem bei kleinen Probleminstanzen bestimmen.
- anhand beispielhafter Probleminstanzen erklären, warum die FIFO-Strategie strikt k-kompetitiv ist.

Didaktische Überlegungen zum Aufbau der Unterrichtseinheit

In dieser Unterrichtseinheit versuchen wir, das Paging-Problem aus dem Kontext des Hardwaredesigns herauszunehmen und stattdessen im leichter zugänglichen Kontext von Buchhandlungen zu beschreiben. Die zwei Versionen des Problems (Offline und Online) werden durch zwei unterschiedlich organisierte Buchhandlungen repräsentiert, die den beiden Schwestern **Of**elia und **On**na gehören. Durch diese Umformulierung soll erreicht werden, dass die Schülerinnen und Schüler intuitiv unterschiedliche Online-Strategien ausprobieren, diese durch Worst-Case-Szenarien testen («ärgern» einer Buchhändlerin) und mit der optimalen Offline-Lösung vergleichen. Dabei werden viele konkrete Probleminstanzen studiert, um das Problem sehr kleinschrittig zu erarbeiten. Dabei folgen wir einer Geschichte über die beiden Buchhändlerinnen, die eine schrittweise Verbesserungen der Strategien motivieren soll. Im Anhang am Ende werden zwei Vertiefungsaufgaben für schnelle Schülerinnen und Schüler zur Verfügung gestellt, in denen die Thematik der FIFO-Anomalie sowie ein Beweis für die strikte k-Kompetivität der FIFO-Strategie vorgestellt wird.

Das Problem der Buchhandlung

Die Schwestern Onna und Ofelia wachsen in einer Familie von Buchhändlern auf. Sobald sie erwachsen sind, ziehen sie aus dem Elternhaus in unterschiedliche Städte aus und beschliessen dort, ganz nach dem Vorbild ihrer Eltern, je eine Buchhandlung zu eröffnen. Aus der Erfahrung ihrer Eltern haben Sie gelernt, dass ein grosser Vorrat an Bücher der Schlüssel zum Erfolg einer Buchhandlung ist. Sie schliessen Verträge mit mehreren Verlagen ab, die Bücher in grossen Mengen verkaufen. Jedes Buch wird dabei in einer Kiste mit hundert Exemplaren geliefert. Beide Geschwister investieren nach der Eröffnung viel darin, einen grossen Vorrat an Bücherkisten mit allen Büchern aufzubauen, die aktuell gefragt sind.

Bei der Suche nach einem Gebäude für ihre Buchhandlungen achten sie vor allem darauf, dass diese einen sehr grossen Keller haben, um die vielen Bücherkisten unterzubringen. Der Kundenbereich ist dagegen sehr klein und besteht lediglich aus einer Theke und Platz für 6 Bücherkisten. Sobald ein Kunde ein anderes Buch kaufen möchte, das in keiner der 6 Bücherkisten im Kundenbereich zu finden ist, wird eine der 6 Bücherkisten in den Keller gebracht, um Platz zu schaffen, und die Bücherkiste mit dem gewünschten Buch wird nach oben getragen.

Vor dem Tag der Eröffnung sprechen die zwei Schwestern miteinander und bringen die gleichen 6 Bücherkisten in ihren jeweiligen Kundenbereich. Danach warten sie auf ihre ersten Kunden.

Obwohl die zwei Buchhandlungen sehr ähnlich organisiert sind, haben sich Onna und Ofelia beim Verkauf andere Strategien ausgesucht:

- Bei **Ofelias Buchhandlung** funktioniert der Verkauf nur mit einer vorgängigen Reservation am Vortag. Die Kunden schicken eine Nachricht mit dem Titel des gewünschten Buchs und nehmen eine Uhrzeit im Online-Kalender der Buchhandlung für sich in Anspruch, zu der sie das bestellte Buch am nächsten Tag abholen werden. Falls das Buch in einer der 6 Bücherkisten im Kundenbereich liegt, wird der Kunde von Ofelia sofort bedient. Andernfalls bringt Ofelia eine der Bücherkisten des Kundenbereichs in den Keller und ersetzt es durch die Bücherkiste mit dem Buch, das der Kunde gewünscht hat. Der Kunde wird anschliessend bedient und die entsprechende Bücherkiste bleibt im Kundenbereich.
- Onna dagegen befürchtet, dass sie viele Spontankunden verlieren würde, wenn sie Bücher nur auf Reservation verkauft. Deswegen dürfen bei **Onnas Buchhandlung** die Kunden jederzeit hereinkommen und ein Buch wünschen. Auch Onna bedient die Kunden direkt, wenn möglich, oder wechselt zuerst eine der Bücherkisten im Kundenbereich aus, bevor sie den jeweiligen Kunden bedienen kann, genau so wie Ofelia.

Da die Bücherkisten schwer sind, ist das Austauschen der Bücherkisten der anstrengendste Teil der Arbeit in den Buchhandlungen.

Relevanz in der Informatik

Das Problem der Buchhandlungen kommt in der Informatik im Bereich des Hardwaredesigns vor. Ein Prozessor (CPU) verarbeitet Daten (↔Bücher), die im sogenannten Hauptspeicher (↔Keller) vorhanden sind. Dabei ist die Geschwindigkeit, mit der ein Prozessor arbeiten kann, um ein Vielfaches höher als die Geschwindigkeit, mit der der Hauptspeicher seine Daten zum Prozessor übertragen kann. Somit wird der Hauptspeicher zu einem Flaschenhals und die Leistung des Prozessors sinkt dramatisch.

Um dieses Phänomen zu vermeiden, wird ein zweiter Speicher, der sog. „Cache“ (↔Kundenbereich) zwischen den Hauptspeicher und den Prozessor geschaltet. Dieser ist viel schneller als der Hauptspeicher und kann mit der Geschwindigkeit des Prozessors mithalten. Er ist jedoch sehr teuer in der Produktion und deswegen in seiner Kapazität sehr begrenzt.

Aus dieser Tatsache ergibt sich die Frage, welche Inhalte aus dem Hauptspeicher in den Cache geladen werden sollten, um die Geschwindigkeit des Prozessors maximal ausnutzen zu können. Die Speicherinhalte liegen als Pages (Speicherseiten) vor (↔Buchkisten), weshalb das Problem auch das *Paging-Problem* (oder *Demand Paging Problem*) genannt wird. Weiss man im Voraus, welche Pages in welcher Reihenfolge bei der Abarbeitung eines Programms gebraucht werden, so spricht man von einem *Offline-Algorithmus für Paging* (↔Ofelias Strategie). Sind dagegen diese Informationen im Voraus unbekannt, und man muss auf das Anfordern jeder Page direkt reagieren, so spricht man von einem *Online-Algorithmus für das Paging* (↔Onnas Strategie).

Die Zuordnung der Begriffe aus dem Buchhandlungsproblem zu den Begriffen des Hardwaredesigns sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

Buchhandlungs-Problem	**Hardwaredesign**
Bücherkiste	Speicherseite (Page)
Keller	Hauptspeicher
Kundenbereich	Cache
Bücherkiste austauschen	Page im Cache durch neue Page aus Hauptspeicher überschreiben
Onnas Strategie	Online-Algorithmus für Paging
Ofelias Strategie	Offline-Algorithmus für Paging
Buch verkaufen	Elementare Anweisung eines Programms ausführen

Strategien für das Problem der Buchhandlung

Bemerkung

Im Folgenden werden wir Beispiele mit konkreten Büchern genauer anschauen. Der Einfachheit halber bezeichnen wir die Bücher nicht durch ihre Titel, sondern schreiben b_1, b_2, … , b_n für n unterschiedliche Buchtitel, die in den Buchhandlungen verfügbar sind. Weiterhin nehmen wir vereinfachend an, dass die 6 Buchkisten, die am Eröffnungstag im Kundenbereich der Buchhandlungen liegen, mit den Büchern gefüllt sind, die mit b_1, b_2, … , b_6 nummeriert sind.

Aufgabe 1

Kann es vorkommen, dass am Eröffnungstag keine der beiden Schwestern eine Bücherkiste austauschen muss, selbst wenn sie je 10 Kunden bedienen müssen? Falls ja, geben Sie unten ein Beispiel einer Reihenfolge von 10 Bestellungen an. Geben Sie dazu die Buchtitel in der Schreibweise b_i für ein Buch mit dem Titel i. Falls nein, geben Sie eine kurze Begründung Ihrer Antwort.

Aufgabe 2

Kann es vorkommen, dass am Eröffnungstag nur eine der zwei Schwestern eine Bücherkiste im Kundenbereich austauschen muss, selbst wenn beide Geschwister 10 Kunden bedienen, die die gleichen Buchtitel wünschen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Dadurch, dass Onna nicht weiss, welche Bücher die nächsten Kunden wünschen werden, kommt es vor, dass Onna eine Bücherkiste in den Keller trägt, die sie kurz darauf wieder hochtragen muss. Hätte sie dagegen im Voraus gewusst, dass dieses Buch bald wieder gewünscht werden würde, dann hätte sie eine andere Bücherkiste wegräumen und sich einen Gang in den Keller sparen können.

Ofelia hat in dieser Hinsicht den Vorteil, dass sie alle Tagesbestellungen schon kennt und somit bessere Entscheidungen treffen kann, wenn es darum geht, eine Bücherkiste aus dem Kundenbereich zu wählen, die nach unten getragen werden muss, um Platz zu machen. Sie plant also vor Ladeneröffnung den Austausch aller Bücherkisten und wählt dabei die Strategie, mit der sie möglichst selten in den Keller steigen muss.

Dieser Unterschied, dass Ofelia im Gegensatz zu Onna Informationen über zukünftige Bestellungen hat, führt dazu, dass sie weniger häufig in den Keller steigen muss – selbst an Tagen, an denen

- beide Buchhandlungen bei der Ladeneröffnung am Morgen die gleichen 6 Buchkisten im Kundenbereich haben und
- beide Buchhandlungen die gleichen Bücher in der gleichen Reihenfolge verkaufen.

Diese Tatsache untersuchen wir in den nachfolgenden Aufgaben.

Aufgabe 3

Wir wollen den Verlauf eines Verkaufstages in den Buchhandlungen in Tabellen darstellen, die auf der nachfolgenden Seite abgedruckt sind. Jede Zeile entspricht einem Buchverkauf. In der ersten Spalte mit den sechs Unterspalten wird notiert, welche Bücherkisten beim aktuellen Verkauf im Kundenbereich liegen. In der Spalte «Verkauf» wird notiert, welches Buch verkauft wird. In der Spalte «Austausch» wird notiert, ob eine Bücherkiste für diesen Verkauf ausgetauscht werden musste. Das Ersetzen von b_3 durch b_7 wird beispielsweise mit $b_3 \rightarrow b_7$ eingetragen.

Spielen Sie zu zweit einen Verkaufstag in Onnas Buchhandlung durch. Eine Person übernimmt die Rolle der Buchkäufer und entscheidet, welches Buch jeweils gewünscht wird. Die andere Person übernimmt die Rolle von Onna und entscheidet, welche Bücherkiste ausgetauscht wird, falls das überhaupt nötig ist. Spielen Sie drei Verkaufstage durch, wobei Onna möglichst selten in den Keller laufen möchte, während die Person, die die Kunden spielt, folgende Zielsetzungen verfolgen sollte:

1. Verkaufstag: Onna sollte gar nicht in den Keller laufen müssen.

Bücherkisten in Onnas Kundenbereich						**Verkauf**	**Austausch**
b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6		

2. Verkaufstag: Onna sollte genau zweimal in den Keller laufen müssen.

Bücherkisten in Onnas Kundenbereich						**Verkauf**	**Austausch**
b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6		

3. Verkaufstag: Onna sollte bei jedem Buchkauf in den Keller laufen müssen.

Bücherkisten in Onnas Kundenbereich						**Verkauf**	**Austausch**
b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6		

Aufgabe 4

In der untenstehenden Tabelle ist eine Reihenfolge von Buchverkäufen in Onnas Buchhandlung angegeben. Onna weiss nicht, welche Bücher später am Tag noch verkauft werden. Sie muss also bei jedem Bücherkistenaustausch spontan entscheiden, welche Kiste sie ersetzen möchte. Sie überlegt sich, ihre Entscheidung nach einer einfachen Strategie zu treffen. Diese lautet:

> *Ersetze die Bücherkiste, die schon am längsten im Kundenbereich steht. Wenn Bücherkisten seit Beginn schon gleich lang im Kundenbereich sind, wähle die mit dem kleinsten Index.*

Diese Strategie wird in der Informatik FIFO-Strategie (engl. first-in-first-out) genannt. Dokumentieren Sie diesen Verkaufstag, indem Sie die Bücher nach Onnas einfacher Strategie austauschen:

Bücherkisten in Onnas Kundenbereich						**Verkauf**	**Austausch**
b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_3	
						b_7	
						b_1	
						b_2	
						b_4	
						b_3	
						b_7	
						b_6	
						b_4	
						b_2	

Wie müsste Ofelia den Austausch der gleichen Bücherkisten planen, um **nur einen Austausch** von Bücherkisten durchzuführen? Dokumentieren Sie in der Tabelle den gesamten Verkaufstag.

Bücherkisten in Ofelias Kundenbereich						**Verkauf**	**Austausch**
b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_3	
						b_7	
						b_1	
						b_2	

						b_4	
						b_3	
						b_7	
						b_6	
						b_4	
						b_2	

Wie wir sehen, kann Ofelia in diesem Fall davon profitieren kann, dass sie alle Tagesbestellungen im Voraus schon kennt. Das ist aber nicht immer der Fall. Es kann z.B. Tage geben, an denen beide Schwestern Glück haben und alle Kunden nur die Bücher b_1, b_2, …, b_6 kaufen möchten, die bereits im Kundenbereich vorliegen. An solchen Tagen bringt Ofelias Wissen über die Tagesbestellungen keinen Vorteil. Aber auch an Tagen, an denen viele unterschiedliche Bücher verkauft werden, ist Ofelia nicht unbedingt im Vorteil, auch wenn man das intuitiv vermuten könnte. Dazu die nachfolgende Aufgabe.

Aufgabe 5

Geben Sie eine Reihenfolge von 10 Tagesverkäufe an, bei denen sowohl Onna als auch Ofelia ganze 10 Bücherkisten austauschen müssen, womit Ofelia mit ihrem Vorwissen über die Tagesbestellungen keinen Vorteil hat.

Bücherkisten in Ofelias Kundenbereich						**Verkauf**	**Austausch**
b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6		

Am Ende dieses sehr anstrengenden Tages, an dem alle Kunden Bücher gewünscht haben, die zur Ladeneröffnung am Morgen noch nicht im Kundenbereich vorlagen, denkt Onna frustriert darüber nach, dass ihre Arbeit viel einfacher gewesen wäre, wenn Sie ihr Angebot an Bücher stark reduzieren würde: «Wie einfach wäre meine Arbeit, wenn ich nur 7 verschiedene Bücher verkaufen würde? Dann müsste ich doch nur ganz selten eine Bücherkiste austauschen».

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass selbst bei so einer starken Einschränkung, dass Onna nur noch **7 verschiedene Buchtitel** im Sortiment hätte, es theoretisch immer noch Tage geben könnte, an denen sie für 10 Tagesverkäufe ganze **zehn Mal** eine Bücherkiste austauschen müsste, wenn sie immer Pech bei der Wahl der Bücherkiste hat, die sie in den Keller transportiert. Geben Sie eine Reihenfolge von 10 Bestellungen und Austauschen an, die aus den Büchern $b_1, b_2, \ldots, b_7$ besteht und dazu führen würde, dass Onna 10 Bücherkisten austauschen müsste.

Bücherkisten in Onna Kundenbereich						**Verkauf**	**Austausch**
b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6		

Aufgabe 7

Zeigen Sie für die gleiche Reihenfolge von 10 Tagesbestellungen, wie Ofelia diese verarbeiten würde. Könnte Sie ihren Vorteil, dass sie alle Bestellungen im Voraus schon kennt, ausnutzen, um weniger Bücherkisten auszutauschen? Übertragen Sie dazu die Verkaufsreihenfolge aus Aufgabe 6 in die untenstehende Tabelle und planen Sie Ofelias Verkaufstag.

Bücherkisten in Ofelias Kundenbereich						**Verkauf**	**Austausch**
b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6		

Bei der Lösung der vorherigen Aufgabe ist es Ihnen vermutlich gelungen, für Ofelia eine Abarbeitung der Verkäufe zu finden, bei der nur sehr wenige Bücherkisten ausgetauscht werden müssen.

Aufgabe 8

> Können Sie erkennen, worauf Ofelia achten muss, wenn Sie eine Bücherkiste auswählt, die in den Keller getragen werden soll? Versuchen Sie eine Strategie zu formulieren, die Ofelia im Allgemeinen hilft, eine geeignete Bücherkiste zu identifizieren, die in den Keller getragen werden sollte, wenn ein Kunde ein Buch kaufen möchte, das nicht im Kundenbereich vorliegt.

Onna ist neidisch auf Ofelia, die mit ihrer Strategie aus Aufgabe 8 nur sehr selten in den Keller steigen muss. Sie überlegt sich, den Gedanken zu kopieren, dass die Bücher in den Keller gebracht werden, die am längsten nicht mehr benutzt werden. Allerdings kennt Onna die zukünftigen Bestellungen nicht. Sie hat folgende Idee, um das Problem zu umgehen: Wenn ein Buch in der Vergangenheit lange nicht mehr gekauft wurde, ist es sehr wahrscheinlich, dass es sich dabei um ein unbeliebtes Buch handelt, das auch in der Zukunft selten gekauft werden wird. Ein Bestseller, der kürzlich verkauft wurde, sollte sie hingegen nicht in den Keller bringen. Ihre Strategie lautet also:

> *Ersetze immer die Buchkiste, die am längsten nicht mehr verwendet wurde. Wurden mehrere Buchkisten seit dem Anfang gleich lange nicht mehr verwendet, bringe die mit dem kleinsten Index in den Keller.*

Diese Strategie wird LFU-Strategie genannt (engl. Least frequently used). Sie ist besonders dann besser als die FIFO-Strategie, wenn gewisse Bücher viel häufiger verkauft werden als andere Bücher (sog. Bestseller).

Aufgabe 9

> In der nachfolgenden Aufgabe werden gewisse Bücher häufiger verkauft als andere. Bei b_1, b_3 und b_7 handelt es sich nämlich um Bestseller. Zeigen Sie, dass mit der LRU-Strategie weniger Bücherkistenaustausche nötig sind als mit der FIFO-Strategie.

FIFO-Strategie:

Bücherkisten in Ofelias Kundenbereich						**Verkauf**	**Austausch**
b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_1	
b_7						b_7	
						b_3	
	b_1					b_1	
						b_4	
						b_3	
		b_2				b_2	
						b_1	
			b_3			b_3	
						b_7	

LRU-Strategie:

Bücherkisten in Ofelias Kundenbereich						**Verkauf**	**Austausch**
b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_1	
	b_7					b_7	
						b_3	
						b_1	
						b_4	
						b_3	
				b_2		b_2	
						b_1	
						b_3	
						b_7	

Dass aber auch die LRU-Strategie keine Erfolgsgarantie hat, zeigt nachfolgende Aufgabe.

Aufgabe 10

Finden Sie eine Reihenfolge von 10 Verkäufen, bei denen Onna möglichst oft eine Bücherkiste austauschen muss, wenn sie der LRU-Strategie folgt. Betrachten Sie auch hier wieder die Situation, bei der insgesamt nur sieben Bücher vorhanden sind.

Bücherkisten in Ofelias Kundenbereich						**Verkauf**	**Austausch**
b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6		

Aufgabe 11

Wie müsste Ofelia bei der Reihenfolge von Bücherbestellungen, die Sie in der vorherigen Aufgabe gefunden haben, vorgehen, um möglichst selten in den Keller zu steigen? Berechnen Sie den Unterschied in der Anzahl Austausche von Bücherkisten zwischen Onna und Ofelia als Faktor, d.h. finden sie eine Zahl x, so dass Onna x-Mal so oft Bücherkisten austauschen musste wie Ofelia. Diese Zahl x quantifiziert in gewissem Sinne den Vorteil, den Ofelia dadurch hat, dass sie die Reihenfolge der bestellten Bücher im Voraus schon kennt.

Als Onna und Ofelia sich Gedanken darüber machen, wie sie die Anzahl Male, an denen sie eine Bücherkiste austauschen müssen, möglichst klein halten können, überlegen sie sich, den Kundenbereich zu erweitern. Wenn Sie Geld investieren, um im Kundenbereich mehr Platz für zusätzliche Bücherkisten zu schaffen, werden sie hoffentlich weniger häufig in den Keller steigen müssen, um andere Bücherkisten in den Kundenbereich zu bringen. Es ist einleuchtend, dass ein grösserer Kundenbereich zu weniger Austausch von Bücherkisten führen kann. Schliesslich ist die Chance grösser, dass das gewünschte Buch bereits im Kundenbereich vorliegt.[1]

[1] Dass das jedoch nicht immer der Fall ist, zeigt die Aufgabe 15 im Anhang dieser Lerneinheit.

Eine interessante Frage ist also, wie gross der Vorteil von Ofelia *in Abhängigkeit der Grösse des Kundenbereichs* ist. Bringt ihr das Wissen über die bevorstehenden Bücherverkäufe mehr, wenn sie auch mehr Platz hat Bücher im Kundenbereich zu speichern?

Aufgabe 12

Nehmen Sie an, dass der Kundenbereich Platz für nur 3 Bücher bietet. Können Sie eine Reihenfolge von 9 Bücherverkäufen mit insgesamt nur 4 unterschiedlichen Buchtitel finden, bei der Onna doppelt so oft Bücherkisten austauschen muss wie Ofelia? Oder vielleicht sogar um einen grösseren Faktor? Füllen Sie die untenstehende Tabelle sowohl für Onnas wie für Ofelias Kundenbereich aus. Bestimmen Sie den Faktor, wie viel häufiger Onna in den Keller steigen muss.

Bücherkisten in Onnas Kundenbereich			**Austausch von Onna (FIFO)**	**Verkauf**	**Bücherkisten in Ofelias Kundenbereich**			**Austausch von Ofelia**
b_1	b_2	b_3			b_1	b_2	b_1	

Aufgabe 13

Versuchen Sie nun, die gleiche Aufgabe nochmals zu lösen, diesmal mit einem Kundenbereich, der Platz für 4 Bücherkisten hat. Verwenden Sie 12 Bücherverkäufe mit insgesamt 5 unterschiedlichen Buchtitel. Um welchen Faktor unterscheiden sich die Anzahl der Bücheraustausche von Onna und Ofelia dieses Mal?

Bücherkisten in Onnas Kundenbereich				**Austausch von Onna (FIFO)**	**Verkauf**	**Bücherkisten in Ofelias Kundenbereich**				**Austausch von Ofelia**
b_1	b_2	b_3	b_4			b_1	b_2	b_1	b_4	

Vermutlich ist es Ihnen gelungen in den letzten zwei Aufgaben jeweils ein Beispiel einer Abfolge von Bücherkäufen zu finden, bei der Onna drei, bzw. vier Mal so oft Bücherkisten austauschen musste wie Ofelia. Dieser Faktor stimmt dabei mit der jeweiligen Grösse der Kundenbereiches überein. Dies ist kein Zufall! Tatsächlich kann man mit einem ähnlichen Vorgehen wie bei den letzten zwei Aufgaben für jede beliebige Kundenbereichsgrösse von k Bücherkisten eine Abfolge von Bücherkäufen finden, bei der Onna mit der FIFO-Strategie k-mal so häufig in den Keller steigen muss wie Ofelia. Andererseits kann man auch zeigen, dass Onna mit der FIFO-Strategie auch *höchstens* k Mal so oft Bücherkisten austauschen muss wie Ofelia. Man sagt, dass die FIFO-Strategie strikt k-kompetitiv ist, d.h. dass Onna mit dieser Strategie höchstens k Mal so oft in den Keller steigen muss wie Ofelia.[2] Auch die LRU-Strategie ist strikt k-kompetitiv und liefert in realistischen Szenarien, wo nicht alle Bücherkisten gleich häufig angefragt werden, sogar noch bessere Resultate. Dass aber nicht jede Strategie strikt k-kompetitiv ist, zeigt die nachfolgende Aufgabe.

Aufgabe 14

Wir betrachten die LIFO-Strategie (engl. „Last-in-first-out“), bei der diejenige Bücherkiste ausgetauscht wird, die zuletzt in den Kundenbereich geholt wurde. Nehmen Sie an, dass der Kundenbereich Platz für 3 Buchtitel hat und geben Sie ein Beispiel einer Abfolge von Bücherkäufen, bei denen Onna mehr als 3 Mal so oft Bücherkisten austauschen muss wie Ofelia.

Bücherkisten in Onnas Kundenbereich			**Austausch von Onna (LIFO)**	**Verkauf**	**Bücherkisten in Ofelias Kundenbereich**			**Austausch von Ofelia**
b_1	b_2	b_3			b_1	b_2	b_3	

[2] Einen Beweis für diese Aussage finden Sie im Anhang in Aufgabe 16.

Anhang

Aufgabe 15

Interessanterweise kann es bei der FIFO-Strategie passieren, dass ein grösserer Kundenbereich zu einer *höheren Anzahl* von Austauschen führen kann, als es bei einem kleineren Kundenbereich der Fall wäre. Dieses erstaunliche Phänomen wird auch FIFO-Anomalie (engl. *Bélády's anomaly*) genannt. Führen Sie für das untenstehende Beispiel von 12 Bücherbestellungen mit 9 unterschiedlichen Buchtiteln die FIFO Strategie aus, einmal für einen Kundenbereich mit Platz für 3 Bücherkisten, und einmal für einen mit Platz für 4 Bücherkisten. Zählen Sie, wie oft eine Bücherkiste ausgetauscht wurde, und verifizieren Sie, dass der grössere Kundenbereich dazu geführt hat, dass man mehr Bücherkisten austauschen musste.

Bücherkisten in Kundenbereich (Platz für 3)			**Verkauf**	**Austausch nach FIFO**
b_1	b_2	b_3	b_5	
			b_6	
			b_7	
			b_8	
			b_5	
			b_6	
			b_9	
			b_5	

			b_6	
			b_7	
			b_8	
			b_9	

Bücherkisten in Kundenbereich (Platz für 4)				**Verkauf**	**Austausch nach FIFO**
b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	
				b_6	
				b_7	
				b_8	
				b_5	
				b_6	
				b_9	
				b_5	
				b_6	
				b_7	
				b_8	
				b_9	

Aufgabe 16

Wir wollen verstehen, warum die FIFO-Strategie strikt k-kompetitiv ist, d.h. warum Onna mit der FIFO-Strategie höchstens k-mal so oft in den Keller steigen muss wie Ofelia, wobei k die Anzahl der Buchkisten im Kundenbereich ist. Wir haben bereits gesehen, dass Ofelia immer die Bücherkiste ersetzen kann, die am längsten nicht mehr benötigt wird. Sobald diese Bücherkiste aber wieder benötigt wird, wird Ofelia zu einem weiteren Gang in den Keller gezwungen. Wir betrachten ein konkretes Beispiel mit k = 3 und vier Bücherkisten b_1, b_2, b_3 und b_4. Zu Beginn liegen die

Bücherkisten b_1, b_2 und b_3 im Kundenbereich. Wir betrachten eine konkrete Reihenfolge von Verkäufen und überlegen uns, wann Ofelia gezwungen ist, Kisten auszutauschen:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
b_3	b_1	b_2	b_4	b_2	b_3	b_3	b_2	b_1	b_2	b_4	b_4	b_3	b_1	b_3	b_2	b_1	b_4	b_2	b_1

Der erste Austausch findet statt, sobald die Kiste b_4, die im Keller liegt, angefragt wird. Das ist beim 4. Verkauf der Fall. Um zu entscheiden, welche Kiste sie durch b_4 ersetzt, schaut sie nach, welche der drei vorhandenen Kisten sie am längsten nicht mehr benötigen wird. Das ist in diesem Fall die Kiste b_1, die erst beim 9. Verkauf wieder zum Zug kommt. Sie tauscht also b_1 durch b_4 aus. Der nächste Austausch findet also beim 9. Verkauf statt. Ofelia überlegt sich wieder, welche Kiste sie am längsten nicht mehr benötigen wird. Es ist die Kiste b_3. Vom 9. Bis zum 12. Verkauf ist also kein Austausch nötig. Beim 13. Verkauf ersetzt sie b_4 durch b_3, weil sie b_4 erst beim 18. Verkauf wieder benötigt. Beim 18. Verkauf wird dann zum letzten Mal b_3 durch b_4 ersetzt. Wir damit den Verkaufstag in Phasen unterteilen, in denen Ofelia keine Austausche vornehmen muss:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
b_3	b_1	b_2	b_4	b_2	b_3	b_3	b_2	b_1	b_2	b_4	b_4	b_3	b_1	b_3	b_2	b_1	b_4	b_2	b_1

Zwischen jeder Phase ist ein Gang in den Keller nötig. Jede Phase zeichnet sich dadurch aus, dass darin genau k = 3 unterschiedliche Bücher verkauft werden. Wenn Ofelia die Bücherkisten zwischen den Phasen also richtig ersetzt, hat sie während der gesamten Phase genau die drei richtigen Bücher im Kundenbereich. Jede Reihenfolge von Verkäufen kann in solche Phasen aufgeteilt werden, die so lange wie möglich sind und in denen genau *k* unterschiedliche Bücher verkauft werden. Eine solche Phasenzerlegung hilft uns abzuschätzen, wie oft Ofelia und Onna mit ihren Strategien in den Keller steigen müssen.

a) Begründen Sie, warum Ofelia pro Phase *mindestens ein Mal* in den Keller steigen muss, egal wie geschickt sie sich anstellt.

b) Begründen Sie, warum Onna mit der FIFO-Strategie pro Phase *höchstens k Mal* in den Keller steigen muss.

c) Begründen Sie mit den Resultaten aus a) und b), warum die FIFO-Strategie strikt k-kompetitiv ist, d.h. warum Onna mit der FIFO-Strategie höchstens k Mal so oft in den Keller steigen muss wie Ofelia.

Lösungen

Aufgabe 1

Solange alle Kunden nur Bücher kaufen, die in einer Bücherkiste im Kundenbereich vorliegen, muss kein Austausch von Bücherkisten stattfinden. Anders gesagt würden alle Abfolgen von Verkäufen, die nur die Buchtitel b_1, …, b_6 beinhalten, dazu führen, dass keine Bücherkisten ausgetauscht werden müssen. Ein paar Beispiele für solche Abfolgen sind:

- $b_1, b_1, b_1, b_1, b_1, b_1, b_1, b_1, b_1, b_1$
- $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_6, b_6, b_6, b_6$
- $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_1, b_2, b_3, b_4$

Aufgabe 2

Damit nur eine der Schwestern am Eröffnungstag eine Bücherkiste austauschen muss, müsste der gleiche Bücherkauf bei einer der beiden Schwestern dazu führen, dass sie eine Bücherkiste aus dem Keller holen müsste, während das gleiche Buch bei der anderen Schwester im Kundenbereich liegt. Da beide Geschwister am Eröffnungstag die gleichen Bücherkisten im Kundenbereich haben, ist das nicht möglich.

Aufgabe 3

1. Verkaufstag: Die Kunden verlangen einfach nur Bücher aus den Kisten b_1 bis b_6.

2. Verkaufstag: Option 1: Die Kunden verlangen die Bücher b_7 und b_8. Option 2: Die Kunden verlangen das Buch b_7. Danach verlangen sie das Buch, das Onna in den Keller geräumt hat, um Platz für das Buch b_7 zu schaffen. Danach verlangen die Kunden nur noch Bücher, die bereits im Kundenbereich liegen.

3. Verkaufstag: Option 1: Die Kunden verlangen nacheinander die Kisten b_7, b_8, b_9, usw. Option 2: Die Kunden verlangen das Buch b_7. Danach verlangen sie immer genau das Buch, das Onna, gerade in den Keller geräumt hat.

Aufgabe 4

Die FIFO-Strategie führt zu folgendem Tagesverlauf:

Bücherkisten in Onnas Kundenbereich						***Verkauf***	***Austausch***
b_1	b_2	b_3 (x)	b_4	b_5	b_6	b_3	
b_7 (x)	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	$b_1 \rightarrow b_7$
b_7	b_1 (x)	b_3	b_4	b_5	b_6	b_1	$b_2 \rightarrow b_1$
b_7	b_1	b_2 (x)	b_4	b_5	b_6	b_2	$b_3 \rightarrow b_2$
			(x)			b_4	

b_7	b_1	b_2	b_3 (x)	b_5	b_6	b_3	$b_4 \rightarrow b_3$
(x)						b_7	
					(x)	b_6	
b_7	b_1	b_2	b_3	b_4 (x)	b_6	b_4	$b_5 \rightarrow b_4$
		(x)				b_2	

Ofelia stellt fest, dass die Bücherkiste b_5 in diesem Tag gar nicht benötigt wird. Sie ersetzt also b_5 durch b_7 und muss damit keine weiteren Ersetzungen vornehmen.

Bücherkisten in Ofelias Kundenbereich						***Verkauf***	***Austausch***
b_1	b_2	b_3 (x)	b_4	b_5	b_6	b_3	
b_1	b_2	b_3	b_4	b_7 (x)	b_6	b_7	$b_5 \rightarrow b_7$
(x)						b_1	
	(x)					b_2	
			(x)			b_4	
		(x)				b_3	
				(x)		b_7	
					(x)	b_6	
			(x)			b_4	
	(x)					b_2	

Aufgabe 5

Wenn an einem Tag 10 unterschiedliche Bücher bestellt werden, die noch nicht im Kundenbereich vorliegen, ist das zehnmalige Austauschen von Bücherkisten unvermeidlich, selbst wenn man im Voraus weiss, welche Buchtitel gekauft werden.

Bücherkisten Kundenbereich						***Verkauf***	***Austausch***
b_7 (x)	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	$b_1 \rightarrow b_7$
	b_8 (x)					b_8	$b_2 \rightarrow b_8$

		$b_9(x)$				b_9	$b_3 \rightarrow b_9$
			$b_{10}(x)$			b_{10}	$b_4 \rightarrow b_{10}$
				$b_{11}(x)$		b_{11}	$b_5 \rightarrow b_{11}$
					$b_{12}(x)$	b_{12}	$b_6 \rightarrow b_{12}$
$b_{13}(x)$						b_{13}	$b_7 \rightarrow b_{13}$
	$b_{14}(x)$					b_{14}	$b_8 \rightarrow b_{14}$
		$b_{15}(x)$				b_{15}	$b_9 \rightarrow b_{15}$
			$b_{16}(x)$			b_{16}	$b_{10} \rightarrow b_{16}$

Aufgabe 6

Auch wenn Onna nur 7 verschiedene Bücher im Angebot hätte, könnte es bei ungünstig gewählten Bücherkisten für den Austausch dazu kommen, dass sie bei allen 10 verkauften Buchtiteln jedes Mal eine Bücherkiste austauschen müsste.

Bücherkisten in Onnas Kundenbereich						***Verkauf***	***Austausch***
$b_7(x)$	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	$b_1 \rightarrow b_7$
	$b_1(x)$					b_1	$b_2 \rightarrow b_1$
		$b_2(x)$				b_2	$b_3 \rightarrow b_2$
			$b_3(x)$			b_3	$b_4 \rightarrow b_3$
				$b_4(x)$		b_4	$b_5 \rightarrow b_4$
					$b_5(x)$	b_5	$b_6 \rightarrow b_5$
$b_6(x)$						b_6	$b_7 \rightarrow b_6$
	$b_7(x)$					b_7	$b_1 \rightarrow b_7$
		$b_1(x)$				b_1	$b_2 \rightarrow b_1$
			$b_2(x)$			b_2	$b_3 \rightarrow b_2$

Aufgabe 7

Ja, Ofelia kann ihren Vorteil ausnutzen, um für diese Abfolge von Bestellungen nur 2 Bücherkisten austauschen zu müssen.

Bücherkisten in Ofelias Kundenbereich						***Verkauf***	***Austausch***
b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_7 *(x)*	b_7	$b_6 \rightarrow b_7$
(x)						b_1	
	(x)					b_2	
		(x)				b_3	
			(x)			b_4	
				(x)		b_5	
				b_6 *(x)*		b_6	$b_5 \rightarrow b_6$
					(x)	b_7	
(x)						b_1	
	(x)					b_2	

Aufgabe 8

Das Ziel von Ofelia ist, die Bücherkisten im Kundenbereich zu behalten, die «in nächster Zeit» gebraucht werden. Daher sollte sie die Bücherkiste in den Keller verschieben, die am weitesten in der Zukunft wieder gebraucht wird. Diese Strategie wird oft mit ***LFU*** *(engl.* ***«Longest Future Distance»****) bezeichnet.*

Aufgabe 9

Mit der FIFO-Strategie sind vier Austausche nötig:

Bücherkisten in Ofelias Kundenbereich						***Verkauf***	***Austausch***
b_1 *(x)*	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_1	
b_7 *(x)*	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	$b_1 \rightarrow b_7$
		(x)				b_3	
b_7	b_1 *(x)*	b_3	b_4	b_5	b_6	b_1	$b_2 \rightarrow b_1$
			(x)			b_4	

		(x)				b_3	
b_7	b_1	b_2 *(x)*	b_4	b_5	b_6	b_2	$b_3 \rightarrow b_2$
	(x)					b_1	
b_7	b_1	b_2	b_3 *(x)*	b_5	b_6	b_3	$b_4 \rightarrow b_3$
(x)						b_7	

Mit der LRU-Strategie sind hingegen nur zwei Austausche nötig:

Bücherkisten in Ofelias Kundenbereich						***Verkauf***	***Austausch***
b_1 *(x)*	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_1	
b_1	b_7 *(x)*	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	$b_2 \rightarrow b_7$
		(x)				b_3	
(x)						b_1	
			(x)			b_4	
		(x)				b_3	
b_1	b_7	b_3	b_4	b_2 *(x)*	b_6	b_2	$b_5 \rightarrow b_2$
(x)						b_1	
		(x)				b_3	
	(x)					b_7	

Aufgabe 10

Mit dieser Reihenfolge kann Onna auch bei der LRU-Strategie dazu gebracht werden, für jeden Buchverkauf in den Keller zu steigen:

Bücherkisten in Onnas Kundenbereich						***Verkauf***	***Austausch***
b_7 *(x)*	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	$b_1 \rightarrow b_7$
	b_1 *(x)*					b_1	$b_2 \rightarrow b_1$
		b_2 *(x)*				b_2	$b_3 \rightarrow b_2$

			$b_3(x)$			b_3	$b_4 \rightarrow b_3$
				$b_4(x)$		b_4	$b_5 \rightarrow b_4$
					$b_5(x)$	b_5	$b_6 \rightarrow b_5$
$b_6(x)$						b_6	$b_7 \rightarrow b_6$
	$b_7(x)$					b_7	$b_1 \rightarrow b_7$
		$b_1(x)$				b_1	$b_2 \rightarrow b_1$
			$b_2(x)$			b_2	$b_3 \rightarrow b_2$

Aufgabe 11

Ofelia könnte die gleiche Bücherkisten austauschen, wie in der Lösung von Aufgabe 7. Sie würde somit für die 10 Bücherverkäufe nur 2 Mal eine Bücherkiste austauschen müssen, während Onna 10 Mal eine Bücherkiste ausgetauscht hat. Das entspricht einem Faktor von x = 5.

Aufgabe 12

Durch ein wenig Ausprobieren kann man herausfinden, dass bei einer Reihenfolge von 9 Bücherverkäufen mit 4 unterschiedlichen Buchtitel, bei denen Onnas Strategie jedes Mal zu einem Austausch von Bücherkisten führt, Ofelias Wissen über die Reihenfolge der zukünftigen Verkäufe ihr hilft, nur 3 Mal Bücherkisten auszutauschen.

Es ist einfach zu sehen, dass dieses Muster sich beliebig weiterführen lässt, so dass auch bei längeren Sequenzen von Verkäufen Ofelia nur ein drittel so oft Bücherkisten austauschen muss wie Onna. Ofelias Strategie dabei ist, diejenige Bücherkiste in den Keller zu bringen, die am weitesten in der Zukunft gebraucht wird. Ohne das Wissen über die komplette Reihenfolge der Bücherverkäufe lässt sich diese Strategie natürlich nicht anwenden.

Bücherkisten in Onnas Kundenbereich			**Austausch von Onna (FIFO)**	**Verkauf**	**Bücherkisten in Ofelias Kundenbereich**			**Austausch von Ofelia**
b_4	b_2	b_3	$b_1 \rightarrow b_4$	b_4	b_1	b_2	b_4	$b_3 \rightarrow b_4$
	b_1		$b_2 \rightarrow b_1$	b_1	(x)			
		b_2	$b_3 \rightarrow b_2$	b_2		(x)		
b_3			$b_4 \rightarrow b_3$	b_3		b_3		$b_2 \rightarrow b_3$
	b_4		$b_1 \rightarrow b_4$	b_4			(x)	

		b_1	$b_2 \rightarrow b_1$	b_1	(x)			
b_2			$b_3 \rightarrow b_2$	b_2	b_2			$b_1 \rightarrow b_2$
	b_3		$b_4 \rightarrow b_3$	b_3		(x)		
		b_4	$b_1 \rightarrow b_4$	b_4			(x)	

Aufgabe 13

Ein ähnliches Vorgehen wie in der vorherigen Aufgabe führt bei Onna jedes Mal zu einem Austausch einer Bücherkiste, während Ofelia nur jedes 4. Mal eine Bücherkiste austauschen muss

Bücherkisten in Onnas Kundenbereich				**Austausch von Onna (FIFO)**	**Verkauf**	**Bücherkisten in Ofelias Kundenbereich**				**Austausch von Ofelia**
b_5	b_2	b_3	b_4	$b_1 \rightarrow b_5$	b_5	b_1	b_2	b_3	b_5	$b_4 \rightarrow b_5$
	b_1			$b_2 \rightarrow b_1$	b_1	(x)				
		b_2		$b_3 \rightarrow b_2$	b_2		(x)			
			b_3	$b_4 \rightarrow b_3$	b_3			(x)		
b_4				$b_5 \rightarrow b_4$	b_4			b_4		$b_3 \rightarrow b_4$
	b_5			$b_1 \rightarrow b_5$	b_5				(x)	
		b_1		$b_2 \rightarrow b_1$	b_1	(x)				
			b_2	$b_3 \rightarrow b_2$	b_2		(x)			
b_3				$b_4 \rightarrow b_3$	b_3		b_3			$b_2 \rightarrow b_3$
	b_4			$b_5 \rightarrow b_4$	b_4			(x)		
		b_5		$b_1 \rightarrow b_5$	b_5				(x)	
			b_1	$b_2 \rightarrow b_1$	b_1	(x)				

Aufgabe 14

Durch einen abwechselnden Verkauf von zwei Buchtitel kann man Onna mit der LIFO Strategie zwingen, jedes Mal eine Bücherkiste austauschen zu müssen. Dagegen kann Ofelia, durch geschicktes Austauschen der ersten Bücherkiste, die ganze Abfolge von Verkäufen mit einem einzigen Austausch von Bücherkisten bedienen.

Bücherkisten in Onnas Kundenbereich			**Austausch von Onna (LIFO)**	**Verkauf**	**Bücherkisten in Ofelias Kundenbereich**			**Austausch von Ofelia**
b_4	b_2	b_3	$b_1 \rightarrow b_4$	b_4	b_1	b_2	b_4	$b_3 \rightarrow b_4$
b_1			$b_4 \rightarrow b_1$	b_1	(x)			
b_4			$b_1 \rightarrow b_4$	b_4			(x)	
b_1			$b_4 \rightarrow b_1$	b_1	(x)			
b_4			$b_1 \rightarrow b_4$	b_4			(x)	
b_1			$b_4 \rightarrow b_1$	b_1	(x)			
b_4			$b_1 \rightarrow b_4$	b_4			(x)	
b_1			$b_4 \rightarrow b_1$	b_1	(x)			

Aufgabe 15

Das Austauschen der Bücherkisten in einem Kundenbereich mit Platz für 3 Bücherkisten sieht wie folgt aus. Es kommt dabei neunmal zu einem Austausch von Bücherkisten.

Bücherkisten in Kundenbereich (Platz für 3)			***Verkauf***	***Austausch nach FIFO***
b_5	b_2	b_3	b_5	$b_1 \rightarrow b_5$
	b_6		b_6	$b_2 \rightarrow b_6$
		b_7	b_7	$b_3 \rightarrow b_7$
b_8			b_8	$b_5 \rightarrow b_8$
	b_5		b_5	$b_6 \rightarrow b_5$
		b_6	b_6	$b_2 \rightarrow b_6$
b_9			b_9	$b_8 \rightarrow b_9$
	(x)		b_5	
		(x)	b_6	
	b_7		b_7	$b_5 \rightarrow b_7$

		b_8	b_8	$b_6 \rightarrow b_8$
(x)			b_9	

Dagegen würde ein Kundenbereich mit Platz für 4 Bücherkisten zu folgender Reihenfolge von Austauschen führen, und insgesamt zehnmal den Austausch einer Bücherkiste verursachen, obwohl mehr Platz im Kundenbereich verfügbar ist.

Bücherkisten in Kundenbereich (Platz für 4)				***Verkauf***	***Austausch nach FIFO***
b_5	b_2	b_3	b_4	b_5	$b_1 \rightarrow b_5$
	b_6			b_6	$b_2 \rightarrow b_6$
		b_7		b_7	$b_3 \rightarrow b_7$
			b_8	b_8	$b_4 \rightarrow b_8$
(x)				b_5	
	(x)			b_6	
b_9				b_9	$b_5 \rightarrow b_9$
	b_5			b_5	$b_6 \rightarrow b_5$
		b_6		b_6	$b_7 \rightarrow b_6$
			b_7	b_7	$b_8 \rightarrow b_7$
b_8				b_8	$b_9 \rightarrow b_8$
	b_9			b_9	$b_5 \rightarrow b_9$

Aufgabe 16

a) Jede Phase beinhaltet k unterschiedliche Bücher, die verkauft werden. Diese k unterschiedlichen Bücher sind aber nicht identisch mit den k Büchern der vorherigen Phase. Mindestens ein Buch muss pro Phase also ausgetauscht werden.

b) Jede Phase beinhaltet k unterschiedliche Bücher, die verkauft werden. Im schlimmsten Fall sind diese alle unterschiedlich zu den k unterschiedlichen Büchern der vorherigen Phase. Onna muss in diesem Fall alle Bücher austauschen. Dank der FIFO-Strategie bleibt jede Kiste, die Onna während einer Phase aus dem Keller holt, bis zum Schluss der Phase im Kundenbereich. Onna muss also niemals mehr als k Bücher austauschen.

c) Das schlechteste Verhältnis besteht für Onna dann, wenn Ofelia nur ein Buch, Onna aber k Bücher austauschen muss. In diesem Fall hat Onna k Mal so viele Bücher ausgetauscht. In allen anderen Fällen (wenn Ofelia zwei oder mehr bzw. Onna weniger als k Bücher austauschen muss) ist das Verhältnis kleiner. Somit ist die FIFO-Strategie strikt k-kompetitiv.