Arbeitsblätter zu Hamming-Codes

1 Aufgaben zum Einstieg

Aufgabe 1: Nennen Sie einige Beispiele, bei denen bei der Datenübertragung Fehlerkorrekturen eingesetzt werden.

Wichtige Begriffe:

Code-Wort Im Beispiel des Kartentricks wurde die Nachricht, die durch die jeweils oben liegende Seite der Karten/Objekte gegeben war, durch das Hinzufügen der zusätzlichen Karten in ein Code-Wort umgewandelt. Das hier verwendete Verfahren ist eine 1-Fehler korrigierende Kodierung, da durch die Kontrollbits genau ein Fehler korrigiert werden kann.

Kontrollbits Jede der Karten stellt ein Bit der Nachricht dar. Die hinzugefügten Bits nennt man Kontrollbits. Ihr Informationswert dient der Fehlererkennung und -korrektur. Die im Kartentrick hinzugefügten Karten kontrollieren jeweils die Korrektheit ihrer Zeile oder Spalte.

Länge der Nachricht Die Länge der Nachricht ist gegeben durch die Anzahl Bits, die übertragen werden sollen. Während der Kodierung werden Kontrollbits hinzugefügt.

Länge des Code-Wortes Die Anzahl Bits des Code-Wortes ergibt sich zusammen aus den Bits der Nachricht und den Kontrollbits. Dies ist die Länge des Code-Wortes.

Aufgabe 2: Eine Möglichkeit der Fehlerkorrektur ist es, Daten mehrfach zu verschicken. Wie viele Kopien reichen aus? Begründen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 3: Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen dem Zaubertrick und der Fehlerkorrektur her.

Aufgabe 4: Vergleichen Sie die Länge der Code-Wörter bei dreifachen Kopien und bei dem Kartentrick. Bilden Sie die Quotienten aus der Anzahl der Kontrollbits und den Nachrichtenbits bei beiden Kodierungen. Gehen Sie von einer Nachrichtenlänge von k^2 Bits aus.

2 Hamming Codes

2.1 Richard Hamming

Richard Hamming war ein amerikanischer Mathematiker (1915–1998). Er hat während des Zweiten Weltkriegs am Manhattan-Projekt zum Bau der ersten Atombomben mitgearbeitet und wechselte anschliessend an die Bell Laboratorien. Dort hat er für seine Forschung die ersten Computer programmiert. Dies geschah damals noch mit Lochkarten. Dabei traten leicht Fehler beim Einlesen der Programme auf. Daher machte er sich Gedanken über eine effiziente Methode, Fehler automatisch zu korrigieren. Das System, das er entwickelt hat, nennt man nun Hamming-Kodierung.

2.2 Hamming-Codes

In diesem Abschnitt sollen Sie das Erstellen einen Datenpaketes in der Hamming-Kodierung kennen lernen und die Logik dahinter verstehen.

Nachrichten können als Aufreihung von Bits aufgefasst werden. Die Anordnung der Kontrollbits, die von Hamming erdacht wurde, soll an einem 4×4-Raster vorgestellt werden.

Wir nummerieren die Zellen von 0 bis 15 durch:

0	1	2	3
4	5	8	7
8	9	10	11
12	13	14	15

Die Stellen, deren Nummer eine Zweierpotenz ist (hier also 1, 2, 4 und 8), reservieren wir für ein Kontrollbit. Die Zelle 0 ebenso. Es bleiben also von den 16 Bits noch 11 für die Nachricht.

Wenn man die 11 Bits lange Nachricht „10100101001“ in dieses Raster schreibt, so erhält man:

			1
	0	1	0
	0	1	0
1	0	0	1

Die Bits an den Stellen 1, 2, 4 und 8 werden nun auf eine bestimmte Weise ermittelt. Das Bit in Zelle 1 wird so gesetzt, dass die beiden Streifen der Spalten 2 und 4 eine gerade Parität besitzen. (Zur Erinnerung: Das heisst, dass die Summe/Anzahl der Einsen eine gerade Zahl ist.)

	0		1
	0	1	0
	0	1	0
1	0	0	1

Das Bit in Zelle 2 wird so gesetzt, dass der Block, der die letzten beiden Spalten beinhaltet, eine gerade Parität hat.

		0	1
	0	1	0
	0	1	0
1	0	0	1

Diese beiden Bits genügen, um die fehlerhafte Spalte zu identifizieren. Angenommen wir ändern das Bit in Zelle 11 von einer 0 zu einer 1. Das Raster sieht dann so aus:

	0	0	1
	0	1	0
	0	1	1
1	0	0	1

	0	0	1
	0	1	0
	0	1	1
1	0	0	1

	0	**0**	1
	0	1	0
	0	1	1
1	0	0	1

Man sieht, dass die Parität der Spalten als auch die Parität des Blocks ungerade ist. Daher ist der Fehler in der Schnittmenge der beiden rot markierten Bereiche, also in der letzten Spalte.

Aufgabe 5: Ändern Sie ein Bit in der 2. oder 3. Spalte und vergewissern Sie sich, dass man auch in diesen Fällen die fehlerhafte Spalte erkennen kann. Wie geht das?

Wenn man sich nun klargemacht hat, dass dieses Verfahren für die Spalten funktioniert, kann man für die Zeilen genauso vorgehen und so auch Fehler in der ersten Spalte erkennen (eine Ausnahme bleibt die Zelle 0).

	0	0	1
1	0	1	0
	0	1	0
1	0	0	1

	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	0
1	0	0	1

Schliesslich wird noch der Wert der Zelle 0 so gesetzt, dass die Parität des gesamten Rasters gerade ist.

Das präparierte Datenpaket ist nun:

1	0	0	1
1	0	1	0
0	0	1	0
1	0	0	1

Zu der Nachricht „10100101001“ gehört also das Code-Wort: „1001101000101001“.

Aufgabe 6: Erstellen Sie ein präpariertes Datenpaket zu der gegebenen Nachricht: „11100011100“. Geben Sie das Code-Wort an.

Aufgabe 7: Finden Sie den Fehler.

a)

1	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	1
1	0	0	0

b)

1	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	0	1

Was ist an diesem Beispiel speziell? Beachten Sie, welches Bit als falsch erkannt wird.

In Teil b) wird ein Kontrollbit als falsch erkannt.
Wir stellen fest, dass auch ein Fehler in einem Kontrollbit erkannt wird.

Aufgabe 8: Wie erkennt man einen falschen Wert im Bit 0? Z.B. hier:

0	1	0	1
1	0	0	0
1	0	0	0
0	0	1	0

Aufgabe 9: Bisher haben Sie einen Fehler erkannt. Das folgende Code-Wort hat zwei Fehler. Woran erkennen Sie dies?

1	0	1	1
0	1	0	0
0	0	0	1
1	1	0	1

Das Kontrollbit an Position 0 spielt also eine wichtige Rolle. Wenn anhand der anderen Kontrollbits ein Fehler festgestellt wird, dann kann man am Bit 0 erkennen, ob es genau ein Fehler ist. In diesem Fall ist es falsch, da ein Bit im Code-Wort geändert worden ist. Wenn es aber korrekt erscheint, sind mehr als ein Fehler aufgetreten. Dann muss, wenn man mit dieser Kodierung arbeitet, das Code-Wort noch einmal übertragen werden.

2.3 Wahl der Kontrollbits

Es können also Fehler in einem der 11 bzw. 16 Bits erkannt werden. Die Wahl der Position der Kontrollbits und der Regionen, die sie kontrollieren, scheint momentan aber recht willkürlich gewählt. Dies soll im Folgenden genauer angeschaut werden.

Aufgabe 10: Vergleichen Sie die Nummerierung der einzelnen Zellen in Binärdarstellung in den einzelnen Streifen und Blöcken, die bei der Hamming-Kodierung verwendet wurden. Was gilt insbesondere für die Kontrollbits?

0	1	2	3
4	5	8	7
8	9	10	11
12	13	14	15

0000	0001	0010	0011
0100	0101	0110	0111
1000	1001	1010	1011
1100	1101	1110	1111

Die Kodierung lässt sich leicht erweitern. Wenn wir eine Matrix von 8×8 Bits erstellen, können wir die Zellen von 0 bis 63 durchnummerieren. Die Zellen mit den Nummern 1, 2, 4, 8, 16 und 32 nutzen wir als Kontrollbit für die entsprechenden Spalten und Blöcke. Zusammen mit dem Bit 0 benötigen wir so 7 Bits zur Fehlerkorrektur von 57 Bits. Bei 16×16 Bits benötigt man 9 Kontrollbits zur Korrektur von 247 Bits.

Aufgabe 11: Markieren Sie farblich, auf welche Zellen sich die markierten Kontrollbits beziehen.

0	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95
96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111
112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127
128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143
144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159
160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175
176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191
192	193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207
208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223
224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239
240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255

Aufgabe 12: Zeigen Sie: Es werden $\log_2(n) + 1$ Kontrollbits benötigt, wenn man ein Code-Wort der Länge $n = 2^k$ Bits erstellt.

2.4 Der Clou der Wahl der Kontrollbits

Einerseits benötigen wir deutlich weniger Kontrollbits als bei der zeilen- und spaltenweisen Kodierung des Zaubertricks. Die falsche Zelle ist aber auch sofort identifiziert, wenn man die Nummern der Kontrollbits betrachtet, die den Fehler anzeigen. Beispiel:

1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	0
1	1	0	0

Zellnummern:

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

oder

1	0	1	1
0	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1

Zellnummern:

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

Aufgabe 13: Wie hängt die Zellennummer der falschen Zelle (blau) mit den Zellennummern der fehlerhaften Kontrollbits (rot) zusammen? Können Sie den Zusammenhang erklären?