Induktive Lösung des «Lights On»-Problems

Reto Bader

Klassenstufe: 9 – 12

Zielsetzung und fachliche Einordnung

Anhand eines einfachen Spiels mit (beliebigen) ungerichteten Graphen sollen die Schülerinnen und Schüler einen induktiven Beweis für die Existenz einer Lösung nachvollziehen. Basierend auf diesem Beweis wird ein Algorithmus entwickelt, mit dessen Hilfe eine Lösung bestimmt werden kann.

Voraussetzungen

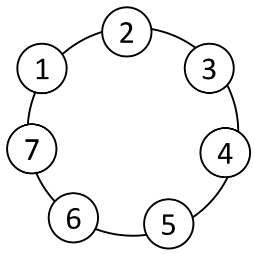
Es wird vorausgesetzt, dass die Schülerinnen und Schüler das allgemeine Vorgehen bei einem induktiven Beweis kennen, dieses zumindest an einigen Beispielen haben nachvollziehen können und idealerweise bereits erste Erfahrungen im Lösen solcher Aufgaben gesammelt haben. Hilfreich ist zudem die vorgängige Besprechung eines komplexeren Problems, z.B. des «Turms von Hanoi». Ähnlich wie bei dem «Turm von Hanoi» geht es bei «Lights On» um den Nachweis der Lösbarkeit und um die Angabe eines Algorithmus, mit Hilfe dessen das Problem effizient gelöst wird.

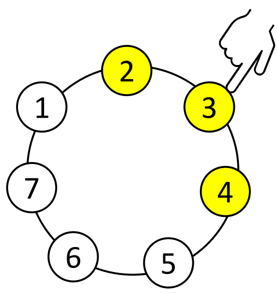
Teil 1: Einfache Spiele mit Lampenketten

Das Spiel «Lights On» mit Lampenketten

n Lämpchen mit einem Schalter sind im Kreis angeordnet. Jede Lampe hat zwei Zustände «on» oder «off». Zu Beginn sind alle Lampen ausgeschaltet («off»). Wird ein Schalter gedrückt, ändern jeweils die zugehörige Lampe sowie die unmittelbar benachbarten Lampen ihren Zustand von «off» nach «on» oder umgekehrt. Das Bild rechts zeigt eine kreisförmig angeordnete Kette mit 7 Lampen. Im Beispiel wird Lampe 3 eingeschaltet. Dabei ändern auch die beiden benachbarten Lampen 2 und 4 ihren Zustand von «off» nach «on».

Der Name «Lights On» wurde in Anlehnung an das gleichnamige Exponat im Technorama in Winterthur gewählt. Im Sektor «MatheMagie» finden Sie ein Spiel mit 7 Lampen.





1.1. Knobelaufgabe

Die n Lämpchen sind alle ausgeschaltet. Es sollen alle Lämpchen leuchten. Untersuchen Sie, ob dies für folgende Werte von n möglich ist. Notieren Sie dabei, welche Schalter Sie in welcher Reihenfolge drücken, um das Ziel zu erreichen.

a) $n = 3$ b) $n = 4$ c) $n = 5$ d) $n = 6$

e) Vergleichen Sie Ihre Lösung mit derjenigen Ihrer Banknachbarin/Ihres Banknachbarn und notieren Sie die beobachteten Gemeinsamkeiten und Unterschiede.

f) Versuchen Sie, mit möglichst wenigen Anweisungen möglichst allgemein zu beschreiben, wie man das Rätsel für kreisförmige Ketten mit 3 bis 6 Lampen lösen kann.

1.2. Lernaufgabe

In Knobelaufgabe 1.1. haben wir gesehen, dass es für $n = 3, \ldots, 6$ jeweils möglich ist, durch einmaliges Drücken aller n Schalter alle n Lampen gleichzeitig im Zustand «on» zu sehen.
Nun möchten wir beweisen, dass dies für eine beliebige Anzahl Lampen gilt, wenn diese wiederum zu Beginn des Spiels alle ausgeschaltet sind. Dazu nehmen wir zunächst einen Lampenkreis, von dem wir bereits genau wissen, dass wir unser Ziel erreichen können. Nehmen wir an, dieser Lampenkreis habe n Lampen. Können Sie begründen, warum es auch im Lampenkreis mit $n + 1$ Lampen sicher möglich bleibt, den Zustand zu erreichen, in dem alle Lampen eingeschaltet, also «on» sind?

Anleitung:

Betrachten Sie die beiden Lampen A und B, zwischen die die zusätzliche Lampe L eingefügt wird. Wir wissen, dass im Kreis mit n Lampen (z.B. $n = 3, \ldots, 6$) alle Schalter, also auch jene von A und B je genau einmal gedrückt werden müssen, um alle Lampen gleichzeitig im Zustand «on» zu sehen. Wir behaupten, dass im erweiterten Kreis mit $n + 1$ Lampen das Ziel weiterhin erreicht wird, wenn wiederum die Schalter aller Lampen (also auch A und B) sowie der der hinzugefügten Lampe L je genau einmal gedrückt werden. Beantworten Sie zur Begründung folgende Fragen:

a) Warum ist die Lampe L am Schluss eingeschaltet?
b) Warum sind die Lampen A und B am Schluss eingeschaltet?
c) Warum sind auch alle übrigen $n – 2$ Lampen am Schluss eingeschaltet?
d) Warum sind die Antworten zu den Teilaufgaben a) – c) nicht von der Reihenfolge abhängig, in der die Schalter gedrückt werden?

Nach der allgemeinen Analyse des Spiels «Lights On» mit kreisförmigen Lampenketten wenden wir uns Lampennetzen zu, in denen jede Lampe mit einer beliebigen Auswahl der übrigen Lampen verbunden ist. Bestehen bleibt aber die Regel, dass beim Ein- oder Ausschalten einer Lampe alle Nachbarlampen ihren Zustand ebenfalls ändern. Zudem werden wir Fachbegriffe zur Beschreibung solcher Lampennetze verwenden:

Komponente im Spiel «Lights On»	**Fachbegriff**
Lampe	Knoten
Verbindung zwischen zwei Lampen	Kante
Ein Netz mit Lampen samt Verbindungen	Graph

Das Spiel «Lights On» in der Sprache der Graphentheorie

Gegeben ist ein Graph mit *n* Knoten.

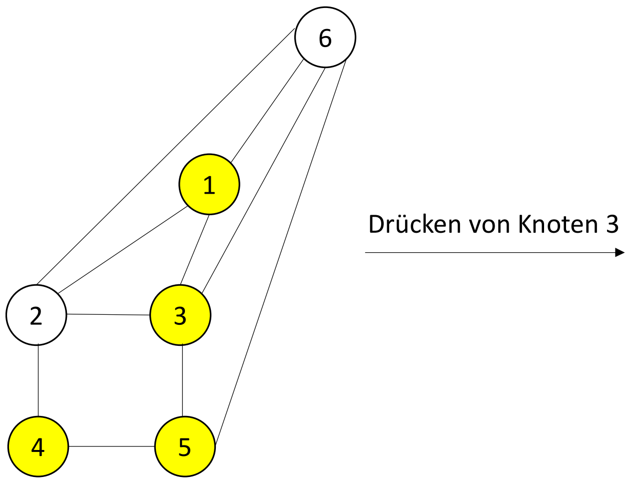
- Jeder Knoten kann in zwei Zuständen sein: «on» oder «off»
- Zwei beliebige Knoten sind entweder durch eine Kante verbunden oder nicht. Wenn sie verbunden sind, nennen wir sie benachbart.
- Durch Drücken eines Knotens kann dessen Zustand von «off» nach «on» oder umgekehrt geändert werden. Gleichzeitig ändern sich aber auch die Zustände aller seiner Nachbarknoten.

1.3. Übungsaufgabe zu den neuen Begriffen

Wir betrachten den unten abgebildeten Graphen. Die gelb markierten Knoten (1, 3, 4 und 5) befinden sich im Zustand «on», die übrigen Knoten sind im Zustand «off».

a) Nennen Sie die Menge aller Nachbarknoten von Knoten 3.

b) Wir drücken den Knoten 3, um seinen Zustand von «on» nach «off» zu ändern. Zeichnen Sie in einer Kopie des Graphen die Zustände aller Knoten nach Drücken von Knoten 3 korrekt ein.



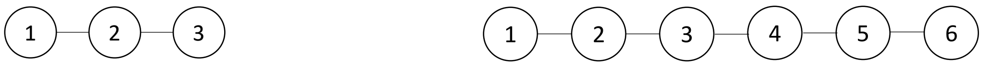
1.4. Übungsaufgabe

In den Graphen aus den Aufgaben 1.1. und 1.2. hat jeder Knoten genau zwei Nachbarknoten. In Aufgabe 1.3. haben wir indessen festgelegt, dass die Knoten eines Graphen mit beliebig vielen anderen Knoten verbunden sein können. Mit solchen Graphen können wir (wie in Aufgabe 1.3. demonstriert) ebenfalls «Lights On» spielen.

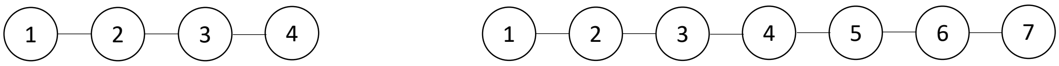
Wir beginnen mit einem weiteren einfachen Fall, nämlich mit Graphen, die aus einer Reihe von n Knoten bestehen (siehe Figur unten). Es gibt also zwei Endknoten, welche jeweils nur einen Nachbarknoten besitzen.

Die Knoten sind zu Beginn des Spiels alle im Zustand «off». Geben Sie jeweils einen Algorithmus an, mit dem man alle $n \geq 3$ Knoten gleichzeitig in den Zustand «on» versetzen kann, wenn gilt:

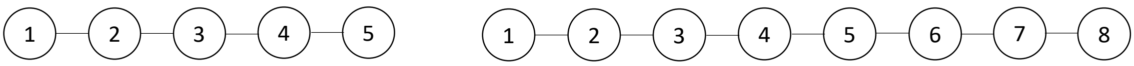
a) $n \bmod 3 = 0$



b) $n \bmod 3 = 1$



c) $n \bmod 3 = 2$



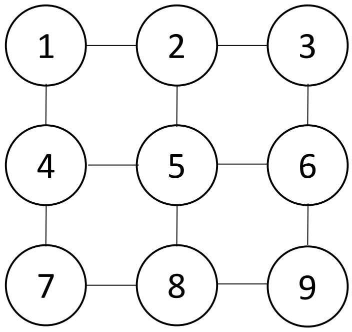
Teil 2: Einfache Spiele mit quadratischen Lampengittern

In Teil 1 haben wir das «Lights On»-Problem für Graphen, die aus kreisförmig oder reihenweise verbundenen Knoten bestehen, betrachtet und gezeigt, dass es in diesen Anordnungen immer lösbar ist. Nun wenden wir uns sogenannten Quadrat-Gittergraphen zu:

Das Spiel «Lights On» mit quadratischen Lampengittern

n^2 Lämpchen sind in einem quadratischen Gitter angeordnet. Jede Lampe hat zwei Zustände «on» oder «off». Zu Beginn sind alle Lampen ausgeschaltet («off»). Wird ein Schalter gedrückt, ändern ausser der zugehörigen Lampe auch alle mit ihr verbundenen Lampen ihren Zustand von «off» nach «on» oder umgekehrt. Von nun an erklären wir Lampen genau dann als benachbart, wenn sie verbunden sind. Das Bild rechts zeigt ein Gitter mit 9 Lampen. Die Lampen 1, 3, 7 und 9 haben jeweils 2 Nachbarn, die Lampen 2, 4, 6 und 8 haben drei Nachbarn und die Lampe 5 hat 4 Nachbarn.

Das Spiel mit einem 5x5-Gitter wurde 1995 von Tiger Electronic unter dem Namen «Lights Out» veröffentlicht. Weitere Informationen gibt es zum Beispiel in dem entsprechenden Wikipedia-Artikel.



2.1. Knobelaufgabe

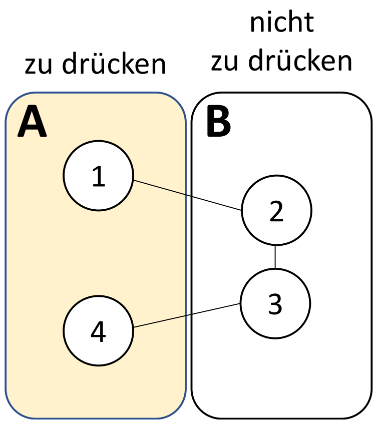
Die n^2 Lämpchen (Knoten) sind alle ausgeschaltet. Es sollen alle Lämpchen leuchten, d.h. alle Knoten in den Zustand «on» versetzt werden. Untersuchen Sie, ob dies für folgende Werte von n möglich ist. Notieren Sie dabei, welche Knoten Sie drücken, um das Ziel zu erreichen.

a) $n^2 = 9$
b) $n^4 = 16$
c) Erklären Sie, warum Sie in Ihren Lösungen zu den Aufgaben a) und b) die gewählten Knoten jeweils in beliebiger Reihenfolge betätigen können, um das Ziel zu erreichen.
d) Was würde passieren, wenn Sie die Knoten mehrmals (aber alle gleich oft) betätigen würden?

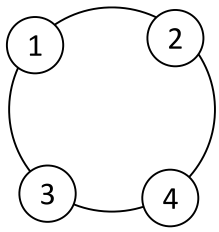
2.2. Lernaufgabe

Für quadratische Gitter der Grössen 3x3 und 4x4 haben wir in Aufgabe 1 die Lösbarkeit des «Lights On»-Rätsels demonstriert. Ist das Rätsel eventuell für alle quadratischen Gitter lösbar?
Halten wir zunächst fest, dass es zur Lösung des Problems ausreicht, eine günstige Auswahl von Knoten genau einmal zu drücken. Zur weiteren Untersuchung ist es hilfreich, die Graphen so anzuordnen, dass die zu drückenden Knoten von den übrigen Knoten getrennt sind.

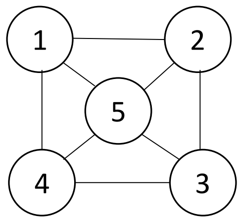
Für einen Graphen mit 4 in einer Reihe angeordneten Knoten erhält man zum Beispiel die rechts abgebildete Darstellung. Um alle Knoten in den Zustand «on» zu versetzen, müssen die Knoten 1 und 4 je einmal gedrückt werden. Die Knoten 2 und 3 werden nicht gedrückt, sie wechseln ihren Zustand durch Drücken von 1 und 4 automatisch auf «on», weil sie je genau einen Nachbarn in A haben, der gedrückt wird.
In der Folge werden wir die «zu drückenden» Knoten als Gruppe A und die «nicht zu drückenden» Knoten als Gruppe B bezeichnen.



a) Finden Sie eine solche Unterteilung in «zu drückende» und «nicht zu drückende» Knoten für einen Kreisgraphen mit 4 Knoten. Hinweis: Sie haben diese Aufgabe in Kapitel 1 bereits gelöst!



b) Man muss genau einen Knoten drücken, um den rechts abgebildeten Graphen aus dem vollständig ausgeschalteten in den vollständig eingeschalteten Zustand zu bringen. Finden Sie den Knoten und zeichnen Sie die resultierende Unterteilung der Knoten in «zu drückende» und «nicht zu drückende» Knoten gemäss oben dargestelltem Schema.



2.3. Lernaufgabe

Mit der in Lernaufgabe 2.2. eingeführten Darstellung fällt es uns nun leicht, ganz beliebige Graphen zu zeichnen, von denen wir bereits von Anfang an wissen, welche Knoten wir drücken müssen, um alle Knoten des Graphen in den Zustand «on» zu versetzen.

a) Zeichnen Sie alle möglichen Graphen mit 4 Knoten, die nach je einmaliger Betätigung von genau 3 Schaltern aus dem ausgeschalteten Zustand in den vollständig eingeschalteten Zustand gebracht werden. Unterteilen Sie den Graphen in die Gruppen A («zu drückende Knoten») und B («nicht zu drückende Knoten»), wie in Lernaufgabe 2.2. gezeigt.

b) Notieren Sie alle Bedingungen an die Verknüpfungen der Knoten, die beim Design der Graphen erfüllt werden müssen. Welche Bedingungen müssen Verknüpfungen von Knoten innerhalb von Gruppe A bzw. B bzw. zwischen Knoten aus A und B erfüllen, damit durch Drücken aller Knoten in A der gesamte Graph von dem komplett ausgeschalteten in den vollständig eingeschalteten Zustand überführt wird?

2.4. Lernaufgabe

Es gibt zusammenhängende Graphen, die man von dem vollständig ausgeschalteten in den vollständig eingeschalteten Zustand überführt, indem man jeden Knoten genau einmal drückt. In Lernaufgabe 2.2. a) haben wir ein solches Beispiel mit 4 Knoten gesehen.

a) Gibt es weitere solche Graphen mit 4 Knoten? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Versuchen Sie, allgemeine Bedingungen an einen Graphen mit n Knoten so zu formulieren, dass garantiert ist, dass der ausgeschaltete Graph nach je einmaligem Drücken aller Knoten des Graphen vollständig eingeschaltet ist.

c) Finden Sie alle solcherart (zusammenhängenden) Graphen mit 5 Knoten.
Tipp: Es gibt genau 2 Lösungen.

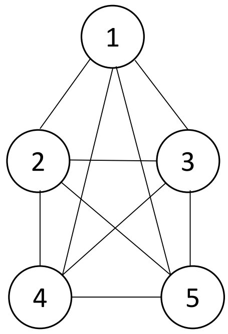
d) Finden Sie möglichst viele Graphen mit 6 Knoten, die sich durch genau einmaliges Drücken jedes Knotens von dem komplett ausgeschalteten in den vollständig eingeschalteten Zustand bringen lassen.

Zusammenfassung der Erkenntnisse aus den Lernaufgaben 2.1. – 2.4.

Die bisherigen Ergebnisse aus Teil 2 haben die folgenden wichtigen Erkenntnisse zur Lösung von «Lights On»-Problemen zutage gebracht:

1 Graphen, in denen jeder Knoten eine gerade Anzahl Nachbarknoten hat, kann man aus dem vollständig ausgeschalteten in den vollständig eingeschalteten Zustand bringen, indem man jeden Knoten in beliebiger Reihenfolge genau einmal drückt (siehe Teil 1 und Lernaufgaben 2.2.a) und 2.4. aus Teil 2).

Beispiel: Ein vollständiger Graph mit 5 Knoten (siehe Figur rechts): Jeder Knoten hat 4 (also eine gerade Anzahl) Nachbarn. Wird jeder Knoten einmal gedrückt, wechselt also jeder Knoten fünfmal den Zustand. Sind zu Beginn alle Knoten in dem Zustand «off», sind sie also am Schluss alle in dem Zustand «on».



2 Lassen sich die Knoten eines Graphen so in zwei Gruppen A und B unterteilen, dass

1. alle Knoten von Gruppe A in ihrer eigenen Gruppe eine gerade Anzahl Nachbarknoten haben (wobei es egal ist, wie viele Nachbarknoten aus Gruppe B sie zusätzlich noch haben)

und

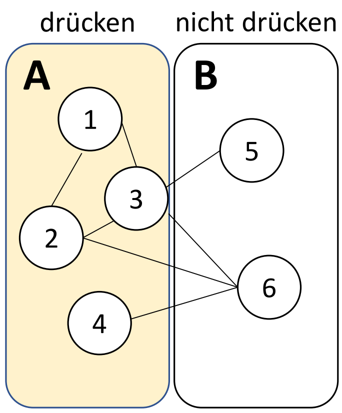
2. alle Knoten von Gruppe B eine ungerade Anzahl Nachbarknoten aus Gruppe A haben (wobei es egal ist, welche weiteren Nachbarn aus ihrer eigenen Gruppe B sie zusätzlich noch haben),

dann lässt sich der ganze Graph (bestehend aus beiden Gruppen A und B) aus dem vollständig ausgeschalteten in den vollständig eingeschalteten Zustand bringen, indem man jeden Knoten aus Gruppe A in beliebiger Reihenfolge genau einmal drückt (siehe Lernaufgaben 2.2.b) und 2.3. aus Teil 2).

In Graphen, in denen jeder Knoten eine gerade Anzahl Nachbarknoten hat, werden damit alle Knoten aus Gruppe A eingeschaltet (siehe Punkt **1**). Gleichzeitig werden dabei aber auch die Knoten aus Gruppe B eingeschaltet, denn sie wechseln wegen der ungeraden Anzahl Nachbarn aus Gruppe A (die alle genau einmal gedrückt werden) ihren Zustand ungeradzahlig oft.

Beispiel: Ein Graph mit 6 Knoten (siehe Figur rechts):

In Gruppe A haben die Knoten 1, 2 und 3 jeweils 2 Nachbarn in der eigenen Gruppe, der Knoten 4 hat 0 Nachbarn in Gruppe A. Alle Knoten in Gruppe A haben also in Gruppe A eine gerade Anzahl Nachbarn. Andererseits haben beide Knoten aus Gruppe B eine ungerade Anzahl Nachbarn in Gruppe A, nämlich Knoten 5 hat einen bzw. Knoten 6 hat drei Nachbarn.



Wir haben nun also ein klareres Verständnis davon, was wir tun müssen, um das «Lights On»-Problem für einen gegebenen Graphen zu lösen. Für Graphen, in denen nicht alle Knoten eine gerade Anzahl Nachbarn haben, müssen wir versuchen, eine Unterteilung der Knoten in zwei Gruppen A («zu drückende Knoten») und B («nicht zu drückende Knoten») gemäss Regel **2** zu erreichen.

In Teil 3 werden wir sehen, dass

- diese Unterteilung für jeden Graphen möglich ist;
- die Gruppen A und B durch Befolgen einer genauen Anleitung (eines Algorithmus) gebildet werden können. Diese Anleitung ist so formuliert, dass sie für alle Graphen funktioniert.

Bevor wir uns mit der Herleitung dieser Anleitung befassen (siehe Teil 3), wollen wir das Unterteilen von Graphen in die beiden Gruppen A und B noch etwas üben. Die Unterteilungen selbstständig zu finden, ist ohne das allgemeine Lösungsrezept, das Sie in Teil 3 kennenlernen, zugegebenermassen nicht einfach!

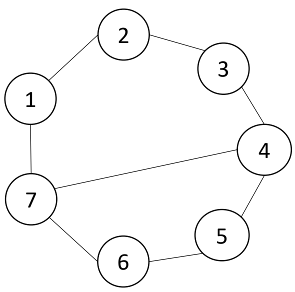
2.5. Übungsaufgabe

In Aufgabe 2.1. haben Sie das «Lights On»-Problem für quadratische Lampengitter mit $n^2 = 9$ und $n^2 = 16$ gelöst. Unterteilen Sie aufgrund der Ihnen bekannten Lösungen die Knoten dieser Graphen jeweils in zwei Gruppen A und B, wie auf Seite 8 beschrieben.

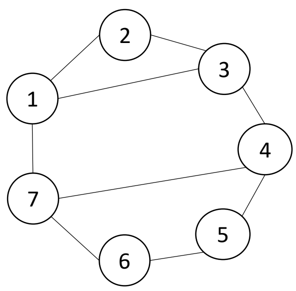
2.6. Übungsaufgabe

In dieser Aufgabe sollen Sie für gegebene Graphen die Unterteilung der Knoten in die beiden Gruppen A und B (wie auf Seite 8 unten beschrieben) vornehmen.

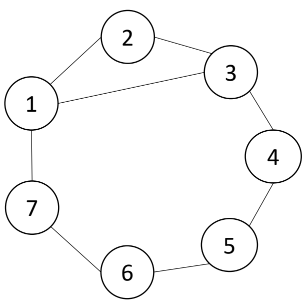
a)



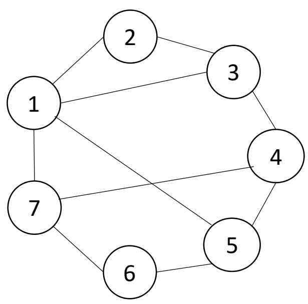
c)



b)



d)



Teil 3: Spiele mit beliebigen Lampennetzen und ein allgemeines Lösungsverfahren nach der induktiven Methode

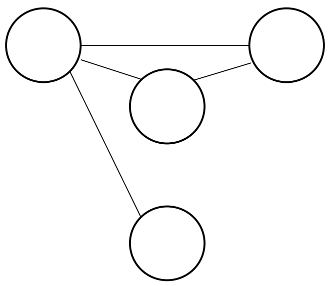
Einführung

In den ersten beiden Teilen haben wir es für Kreisgraphen, quadratische Gittergraphen und in Übungsaufgabe 2.6. auch für Kreisgraphen mit zusätzlichen Verbindungen zwischen einzelnen Knoten immer geschafft, eine Auswahl von Knoten zu identifizieren, die wir alle jeweils genau einmal drücken müssen, um den ganzen Graphen vollständig einzuschalten. Die Frage drängt sich auf, ob wir gar für jeden beliebigen Graphen eine solche Auswahl finden können, um das zugehörige «Lights On»-Problem zu lösen. Im letzten Teil wollen wir also Graphen studieren, in denen wir für jeden Knoten ganz unabhängig entscheiden, mit welchen anderen Knoten er durch eine Kante verbunden sein soll. Die entscheidende Frage, die wir nun beantworten möchten, lautet:

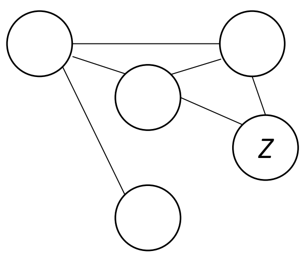
Ist es für einen beliebigen Graphen möglich, eine passende Auswahl von Knoten zu finden, nach deren (einmaligem) Drücken sich alle Knoten im Zustand «on» befinden?

In Teil 2 haben wir gelernt, dass wir zur Lösung eines «Lights On»-Problems eine Unterteilung des Graphen in zwei Knotengruppen finden müssen. Gruppe A beinhaltet die Knoten, die wir genau einmal drücken müssen, Gruppe B diejenigen Knoten, die wir nicht drücken. Wir haben ebenfalls schon bemerkt, dass die Knoten in Gruppe A jeweils eine gerade Anzahl Nachbarn in der eigenen Gruppe haben müssen. Die Knoten von Gruppe B hingegen müssen mit einer ungeraden Anzahl Knoten aus Gruppe A verbunden sein (siehe Zusammenfassung auf Seite 8).

Wir betrachten zur Illustration noch einmal ein Beispiel, das wir bereits in Lernaufgabe 2.3. kennengelernt haben:

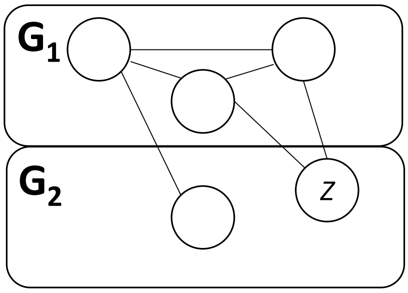


Bevor wir die Unterteilung der Knoten in die beiden Gruppen vornehmen, fügen wir dem Graphen noch einen zusätzlichen Knoten Z hinzu und verbinden Z mit allen Knoten, die eine gerade Anzahl Nachbarknoten haben. Damit haben jetzt alle Knoten (evtl. mit Ausnahme von Z selbst) sicher eine ungerade Anzahl Nachbarknoten.



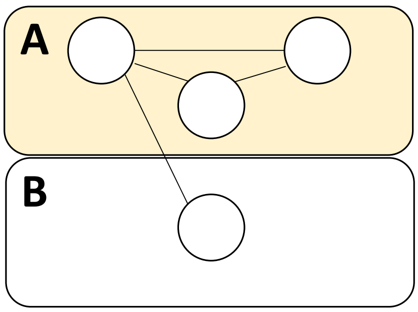
In Lernaufgabe 3.1. werden wir zeigen, dass wir die Knoten (inklusive *Z*) eines beliebigen Graphen in zwei Gruppen teilen können, so dass jede Lampe innerhalb der eigenen Gruppe eine gerade Anzahl Nachbarknoten besitzt. Da wir mit Hilfe des Knotens *Z* sichergestellt haben, dass alle Knoten (evtl. mit Ausnahme von *Z*) eine ungerade Anzahl Nachbarn haben, wissen wir damit auch, dass jeder Knoten (ausser evtl. *Z*) einer Gruppe jeweils mit einer ungeraden Anzahl Knoten aus der anderen Gruppe verbunden ist.

Da wir die Lösung für das Beispiel aus Lernaufgabe 2.3. bereits kennen, können wir die beiden Gruppen ohne Herleitung zeigen. Beachten Sie, dass alle Knoten der ersten Gruppe G_1 mit einer geraden Anzahl Nachbarknoten verknüpft sind (hier jeweils 2). Das Gleiche gilt für die Knoten aus Gruppe G_2. Diese haben in diesem Fall innerhalb ihrer Gruppe G_2 0 Nachbarknoten. Mit Ausnahme des Knotens *Z* haben alle Knoten eine ungeradzahlige Anzahl Verknüpfungen zu Knoten aus der jeweils anderen Gruppe (nämlich je eine).



Wir gehen davon aus, dass sich zu Beginn alle Knoten (beider Gruppen) im Zustand «off» befinden. Wenn wir in genau einer der beiden Gruppen alle Knoten genau einmal drücken, gibt es bei jedem der Knoten in dieser Gruppe eine ungeradzahlige Anzahl Zustandswechsel. Diese werden bewirkt durch das Drücken des jeweiligen Knotens und aller Nachbarknoten (welche in gerader Anzahl vorliegen). Es sind also nachher alle Knoten dieser Gruppe im Zustand «on». Die Knoten der anderen Gruppe werden dabei aber ebenfalls eingeschaltet, weil deren Knoten ja mit einer ungeraden Anzahl Knoten aus der ersten Gruppe verbunden sind. (Die letzte Aussage gilt allerdings nicht für den Knoten *Z*, wenn dieser eine geradzahlige Anzahl Nachbarn hat.)

Damit unsere Lösung nicht von dem Knoten *Z* abhängt, den wir zum ursprünglichen Graphen hinzugefügt hatten, drücken wir zum Einschalten des ganzen Graphen nun einfach die Knoten aus der Gruppe G_1. *Z* ist kein Knoten dieser Gruppe. Die Gruppe mit den Knoten G_1 wird also zur Gruppe A mit den Knoten, deren genau je einmaliges Drücken alle Knoten des Graphen in den Zustand «on» bringt (evtl. mit Ausnahme von *Z*). Damit haben wir eine Lösung des «Lights On»-Problems für den ursprünglichen Graphen (ohne Knoten *Z*) gefunden. Der Knoten *Z* kann zur Darstellung der Lösung aus dem Netz entfernt werden, ohne dass sich dadurch am Verhalten der übrigen Knoten etwas ändern würde.



3.1. Lernaufgabe: Induktiver Beweis für die allgemeine Lösbarkeit des «Lights On»-Problems

Es bleibt noch zu zeigen, dass ein beliebiger Graph mit n Knoten, von denen jeder (ausser evtl. der in der Einführung mit Z bezeichnete Knoten) eine ungerade Anzahl Nachbarknoten besitzt, in zwei Gruppen G_1 und G_2 unterteilt werden kann, so dass jeder Knoten innerhalb der eigenen Gruppe eine gerade Anzahl Nachbarknoten besitzt. Wir erbringen den Nachweis mit Hilfe eines induktiven Beweises.

a) Verankerung der Induktion:

$n = 1$:

Es gibt genau einen Knoten in der ersten Gruppe und keinen Knoten in der zweiten Gruppe. Jeder Knoten einer Gruppe hat somit 0 Nachbarknoten innerhalb der eigenen Gruppe. Weil 0 eine gerade Zahl ist, stimmt die Behauptung für $n = 1$.

$n = 2$:

In einem Netz mit zwei Knoten hat jeder Knoten genau einen Nachbarknoten.

Aufgabe:

Es gibt nur einen Graphen mit genau zwei miteinander verbundenen Knoten. Unterteilen Sie den Graphen in zwei Gruppen, so dass jeder Knoten innerhalb seiner Gruppe eine gerade Anzahl Nachbarknoten besitzt. Vergleichen Sie Ihre Lösung mit dem in Teil 4 abgebildeten Lösungsvorschlag.

$n = 3$:

Aufgabe:

Zeichnen Sie alle möglichen Anordnungen für Graphen mit 3 Knoten und zeigen Sie, wie die Gruppenbildung vorgenommen wird, um das Behauptete nachzuweisen.

b) Induktionsschritt:

Wir setzen voraus, dass für alle Graphen mit n Knoten, von denen jeder (ausser evtl. der in der Einführung mit Z bezeichnete Knoten) eine ungerade Anzahl Nachbarknoten besitzt, die Unterteilung in zwei Gruppen, innerhalb derer jeder Knoten eine gerade Anzahl Nachbarn besitzt, gelungen ist.

Nun zeigen wir, warum es dann auch mit einem Graphen, der $n + 1$ Knoten hat, sicher möglich sein wird, eine solche Unterteilung vorzunehmen. Gemäss Voraussetzung haben alle Knoten (evtl. mit Ausnahme von Z) eine ungerade Anzahl Nachbarknoten.

Wir wählen nun einen beliebigen Knoten L_0 mit einer ungeraden Anzahl Nachbarn L_1, L_2, L_3, …

Für jedes Knotenpaar aus der Nachbarschaft von L_0 ändern wir die Art der Verbindung: Sind zwei Knoten L_j, L_k bislang unverbunden, fügen wir eine Verbindung zwischen ihnen ein. Umgekehrt trennen wir eine Verbindung, wenn im ursprünglichen Graphen eine solche existiert. Ausserdem entfernen wir den Knoten L_0 aus dem Graphen.

Damit haben wir einen Graphen mit n Knoten, von dem wir gemäss Voraussetzung wissen, dass die Unterteilung in die beiden geforderten Gruppen möglich ist. Diesen Graphen mit n Knoten können wir also ganz bestimmt in zwei Gruppen G_1 und G_2 unterteilen, so dass jeder Knoten innerhalb der eigenen Gruppe eine gerade Anzahl Nachbarknoten besitzt!

Nun fügen wir den Knoten L_0 wieder hinzu. Gleichzeitig machen wir die beim Entfernen vorgenommenen Veränderungen an den Verbindungen zwischen den Knoten aus der Nachbarschaft von L_0 rückgängig. Allerdings müssen wir noch die alles entscheidende Frage klären, ob es denn garantiert ist, dass der Knoten L_0 einer der beiden gebildeten Gruppen G_1 oder G_2 zugeordnet werden kann, ohne die Bedingung zu verletzen, dass alle Knoten innerhalb ihrer eigenen Gruppe eine gerade Anzahl Nachbarn besitzen.

Aufgabe:

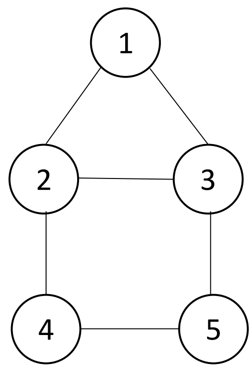
Wir wissen, dass der Knoten L_0 eine ungerade Anzahl Nachbarn hat. Deshalb enthält eine der beiden gebildeten Gruppen eine gerade Anzahl, die andere hingegen eine ungerade Anzahl Nachbarknoten.

Überlegen Sie sich, welcher der beiden Gruppen der Knoten L_0 zugeordnet wird und warum garantiert ist, dass nachher jeder Knoten innerhalb seiner jeweiligen Gruppe weiterhin eine gerade Anzahl Nachbarn besitzt.

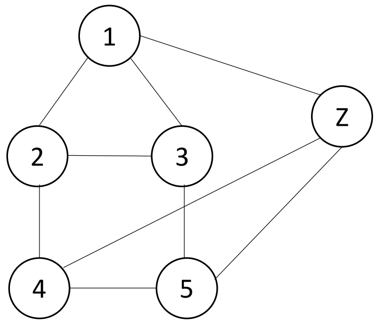
3.2. Lernaufgabe: Der Lösungsalgorithmus

Der induktive Beweis zur allgemeinen Lösbarkeit des «Lights On»-Problems (siehe Lernaufgabe 3.1.) führt direkt zu einem Algorithmus, mit dem sich für einen beliebigen zusammenhängenden Graphen eine Lösung ermitteln lässt.

Wir entwickeln den Algorithmus am Beispiel eines Graphen mit 5 Knoten, wie er in der Figur rechts zu sehen ist.



Schritt 1: Wir fügen dem Graphen einen zusätzlichen Knoten *Z* hinzu, der mit allen Knoten verbunden ist, die eine gerade Anzahl Nachbarn haben.



Aufgabe:

Führen Sie ab hier jeweils die Instruktionen selbstständig aus und kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse anhand der Abbildungen im Lösungsteil.

Schritt 2: Entfernen Sie einen Knoten *L* mit einer ungeradzahligen Anzahl Nachbarn und ändern Sie die paarweisen Verbindungen zwischen allen Nachbarknoten von *L*. Sind zwei Nachbarn von *L* im Netz von Schritt 1 verbunden, wird die Kante zwischen ihnen entfernt. Sind sie hingegen unverbunden, wird eine Kante hinzugefügt.

Hinweis: Im Lösungsvorschlag wird aus mehreren Knoten mit einer ungeraden Anzahl Nachbarn jeweils jener mit der kleinsten Nummer entfernt, der Knoten *Z* wird als letzter Knoten entfernt, falls er zum gegebenen Zeitpunkt eine ungerade Anzahl Nachbarknoten besitzt.

Schritt 3: Wiederholen Sie Schritt 2, bis entweder nur noch 3 Knoten übrigbleiben oder alle noch verbleibenden Knoten eine gerade Anzahl Nachbarn besitzen.

Schritt 4: Unterteilen Sie den Graphen aus Schritt 3 in zwei Gruppen A und B, so dass alle Knoten innerhalb ihrer Gruppe eine gerade Anzahl Nachbarn besitzen.

- Falls nach Schritt 3 nur noch 3 Knoten übrigbleiben, schaffen Sie die Unterteilung bestimmt. In Lernaufgabe 3.1. haben wir gezeigt, dass es für $n = 3$ nur 2 Möglichkeiten gibt. In unserem Beispiel trifft Situation 2 zu: Gruppe G_1 enthält genau einen Knoten mit zwei Nachbarn, die anderen beiden Knoten fallen in Gruppe G_2.

- Falls Sie nach Schritt 3 nur noch Knoten mit einer geraden Anzahl Nachbarn hatten, kommen alle verbleibenden Knoten in dieselbe Gruppe, die andere Gruppe bleibt leer.

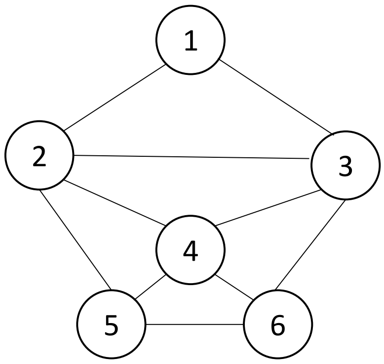
Schritt 5: Bauen Sie die Knoten *L*, die in den Schritten 2 und 3 entfernt wurden, in umgekehrter Reihenfolge wieder in den Graphen ein. Die paarweisen Verbindungen aller Nachbarn von *L* sollen dabei jeweils ebenfalls geändert werden (von getrennt auf verbunden oder umgekehrt).

Entscheiden Sie nach jedem Schritt, zu welcher Gruppe der zuletzt hinzugefügte Knoten *L* gehört. Die Zugehörigkeit wird durch die Anzahl Nachbarn innerhalb der Gruppe festgelegt. Innerhalb seiner eigenen Gruppe muss der Knoten *L* eine gerade Anzahl Nachbarn haben.

Schritt 6: Sind alle Knoten eingebaut und sieht der Graph wieder wie in Schritt 1 aus, sind Sie fertig. Die Knoten, die zum Einschalten des ganzen Graphen gedrückt werden müssen, befinden sich in der Gruppe, die den Knoten *Z* nicht enthält.

3.3. Übungsaufgabe

Wenden Sie den Algorithmus aus Lernaufgabe 3.2. an, um die Knoten zu finden, mit denen alle Knoten des vollständig ausgeschalteten Graphen in den Zustand «on» gebracht werden:



Teil 4: Lösungen

Lösung zu Knobelaufgabe 1.1.

a) Sie können ein beliebiges Lämpchen wählen und den zugehörigen Schalter einmal drücken. Es werden gleichzeitig alle drei Lampen eingeschaltet.

b) – d) Sie müssen jeweils alle Schalter einmal drücken.
Die Reihenfolge können Sie beliebig wählen.

e) Es reicht, zwei Schalter im Abstand 3 (also z.B. Schalter 1 und 4) zu drücken. Alternativ können Sie aber auch wie bei b) – d) alle Schalter in beliebiger Reihenfolge jeweils einmal drücken.

f) Alle Schalter werden in beliebiger Reihenfolge jeweils einmal gedrückt.

Lösung zu Lernaufgabe 1.2.

a) Der Schalter von Lampe L und die Schalter der beiden Nachbarlampen A und B werden je einmal gedrückt. Dadurch ändert sich der Zustand von L genau dreimal. Wenn die Lampe L zum Spielbeginn «off» ist, wird sie am Schluss «on» sein.

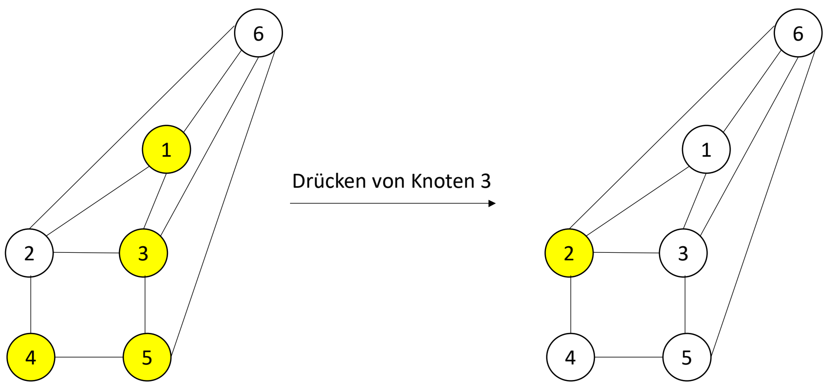
b) Zwischen die Lampen A und B wird die Lampe L eingefügt. Die anderen Nachbarn von A und B bleiben gleich wie im ursprünglichen Kreis mit n Lampen. Der Schalter von Lampe L wird wie alle übrigen Schalter genau einmal gedrückt. Somit ändert sich der Zustand von A weiterhin genau dreimal, nämlich bei Betätigung der Schalter von A und L sowie des zweiten (ursprünglichen) Nachbarn von A. Für B kann analog argumentiert werden. Sind alle Lampen zum Beginn des Spiels «off», gilt somit, dass auch A und B am Schluss in dem Zustand «on» vorliegen.

c) Alle übrigen Lampen haben in dem erweiterten Kreis mit $n + 1$ Lampen die exakt gleichen Nachbarn wie in dem Kreis mit n Lampen. Da die Schalter auch weiterhin alle betätigt werden, ändert sich nichts an der Tatsache, dass die Lampen am Schluss in dem Zustand «on» sind.

d) Die Reihenfolge ist unerheblich, weil die Zustandsänderungen einer Lampe von den Zuständen aller übrigen Lampen unabhängig sind. Es kommt also nicht darauf an, zu welchem Zeitpunkt eine Änderung durch Drücken des Schalters der Lampe oder einer ihrer Nachbarn ausgelöst wird. Relevant ist nur die Anzahl solcher Zustandsänderungen.

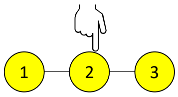
Lösung zu Übungsaufgabe 1.3.

a) $\{1,2,4,5,6\}$ b)

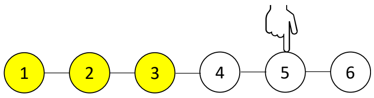


Lösung zu Übungsaufgabe 1.4.

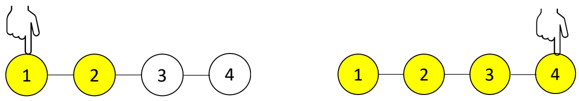
a) Für n = 3 drückt man den mittleren Schalter. Dadurch werden alle drei Lampen eingeschaltet:



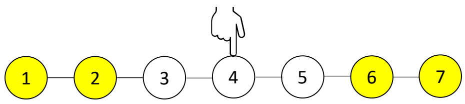
Nun kann die Kette Schritt für Schritt um jeweils 3 Lampen an einem ihrer Enden verlängert werden. Bei jeder Verlängerung drückt man jeweils den mittleren Schalter des neuen Lampentrios, um auch diese Lampen einzuschalten:



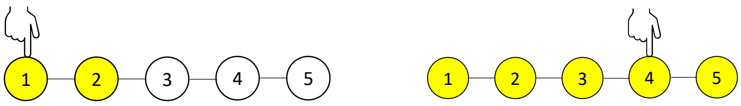
b) Für n = 4 drückt man die Schalter der Lampen 1 und 4. Dadurch werden auch die jeweiligen Nachbarlampen 2 und 3 eingeschaltet:



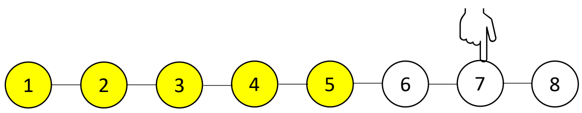
Nun kann die Kette wiederum Schritt für Schritt um jeweils 3 Lampen verlängert werden. Die neuen Lampen werden dazu beispielsweise unmittelbar nach Lampe 2 eingefügt. Nun drückt man den mittleren Schalter des neuen Lampentrios, um sie einzuschalten. Die Zustände aller übrigen Lampen bleiben dabei unberührt.



c) Für n = 5 drückt man zunächst den Schalter von Lampe 1 und schaltet damit die Lampen 1 und 2 ein. Anschliessend werden durch Betätigen von Schalter 4 die Lampe 4 und deren Nachbarlampen 3 und 5 eingeschaltet:



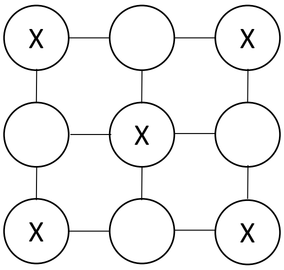
Nun kann die Kette wie bei Aufgabe a) Schritt für Schritt um jeweils 3 Lampen am rechten Ende verlängert werden. Bei jeder Verlängerung drückt man jeweils den mittleren Schalter des neuen Lampentrios, um auch diese Lampen einzuschalten:



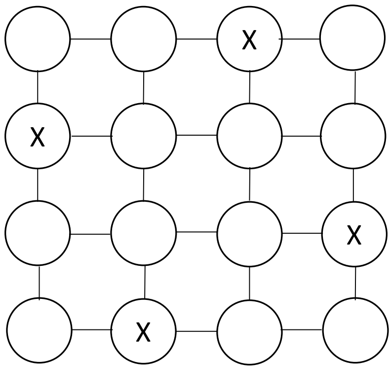
Lösung zu Knobelaufgabe 2.1.

Nach Betätigung der mit X bezeichneten Schalter sind alle Lampen im Zustand «on»:

a)



b)

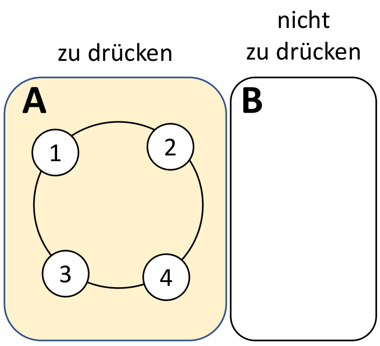


c) Dieselbe Frage wurde bereits in der Lösung zu Lernaufgabe 1.2. d) beantwortet. Die Reihenfolge ist unerheblich, weil die Zustandsänderungen einer Lampe von den Zuständen aller übrigen Lampen unabhängig sind. Es kommt also nicht darauf an, zu welchem Zeitpunkt eine Änderung durch Drücken des Schalters der Lampe oder einer ihrer Nachbarn ausgelöst wird. Relevant ist nur die Anzahl solcher Zustandsänderungen.

d) Werden die bezeichneten Schalter eine ungerade Anzahl Male betätigt, sind die Lampen schliesslich alle im Zustand «on», andernfalls im Zustand «off».

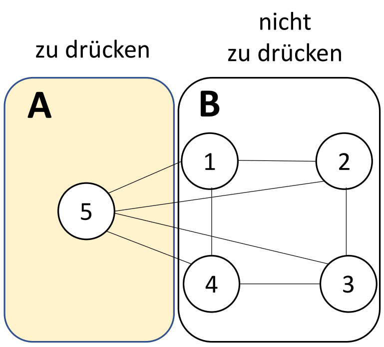
Zusammenfassend stellen wir fest, dass zur Lösung eines «Light On»-Problems gewisse Schalter genau einmal und die übrigen gar nicht betätigt werden müssen. Eine Lösung besteht aus der Angabe einer Menge von Schaltern, die genau einmal gedrückt werden. Die Reihenfolge, in der dies passiert, ist unerheblich.

Lösung zu Lernaufgabe 2.2.



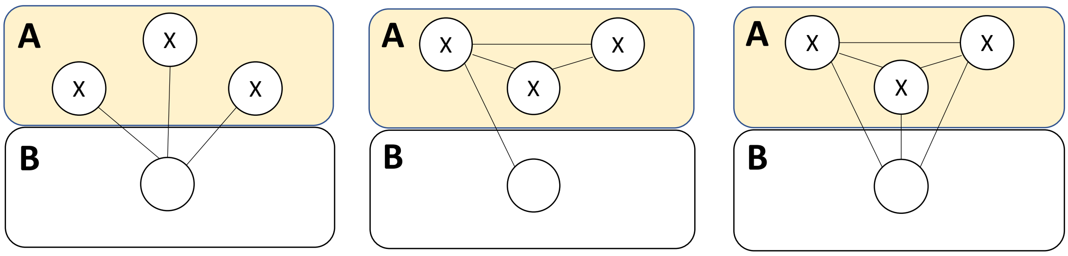
a) In Teil 1 haben wir gezeigt, dass alle Kreisgraphen durch genau einmaliges Drücken aller Knoten vollständig eingeschaltet werden. Es gehören also alle Knoten in Gruppe A, Gruppe B bleibt leer.

b) Durch Drücken von Knoten 5 wechseln alle Knoten (inklusive Knoten 5) den Zustand, weil die Knoten 1 bis 4 Nachbarn von Knoten 5 sind. Zu Gruppe A gehört somit nur Knoten 5, die übrigen 4 Knoten kommen in Gruppe B.



Lösung zu Lernaufgabe 2.3.

a) Es gibt folgende Möglichkeiten für Graphen mit den geforderten Eigenschaften:



b)

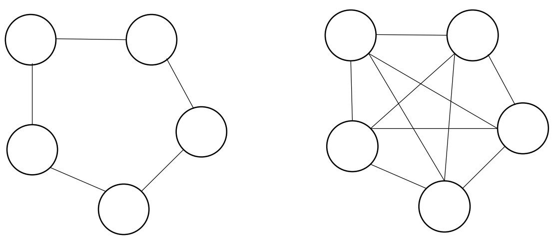
1. Die zu drückenden Knoten (X) von Gruppe A müssen mit einer geraden Anzahl Nachbarn innerhalb von A (d.h. 0 oder 2 Knoten) verbunden werden. Verbindungen von Knoten aus A zu Knoten aus Gruppe B müssen zudem die folgende 2. Bedingung erfüllen:
2. Jeder Knoten aus Gruppe B muss mit einer ungeraden Anzahl Knoten aus der Gruppe A verknüpft werden. (Wenn es in Gruppe B mehrere Knoten gibt, sind Verbindungen dieser Knoten untereinander beliebig.)

Lösung zu Lernaufgabe 2.4.

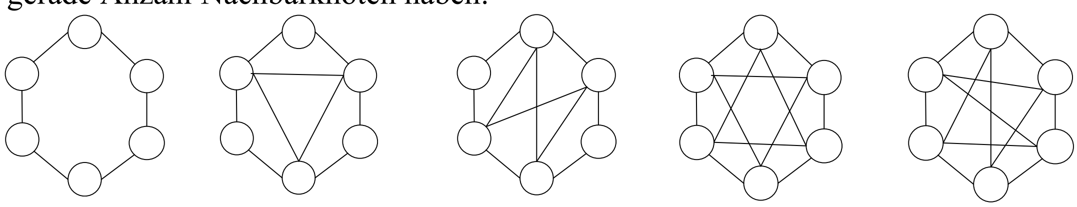
a) Es gibt keine weiteren Graphen mit 4 Knoten: Damit der Graph zusammenhängend ist, müssen alle Knoten genau 2 Nachbarknoten besitzen, damit nach einmaligem Drücken jedes Knotens alle Knoten ihren Zustand dreimal wechseln («off» → «on», «on» → «off», «on» → «off») und damit am Schluss alle den Zustand «on» haben.

b) Damit der Graph vom ausgeschalteten in den vollständig eingeschalteten Zustand wechselt, müssen alle n Knoten ihren Zustand eine ungerade Anzahl Mal ändern. Weil jeder Knoten genau einmal gedrückt werden soll, bedeutet dies, dass alle Knoten eine gerade Anzahl Nachbarn haben müssen.

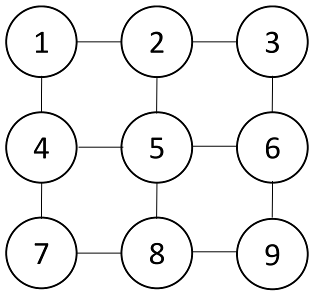
c) Die in b) formulierte Bedingung kann bei zusammenhängenden Graphen mit 5 Knoten auf zwei Arten erfüllt werden: Alle Knoten haben entweder genau 2 oder genau 4 Nachbarn. Alle anderen Graphen mit 5 Knoten haben auch Knoten mit einer ungeraden Anzahl Nachbarn.

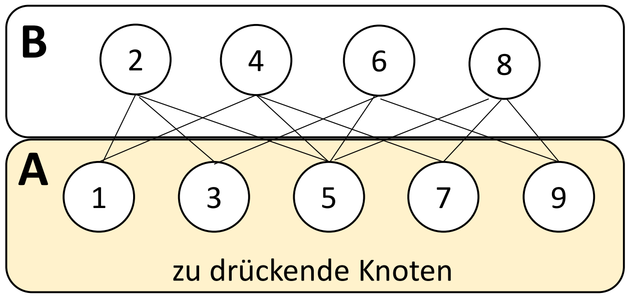


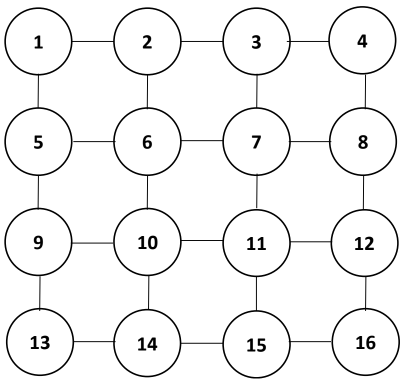
d) Bei Graphen mit 6 Knoten gibt es folgende Möglichkeiten, damit alle Knoten eine gerade Anzahl Nachbarknoten haben:

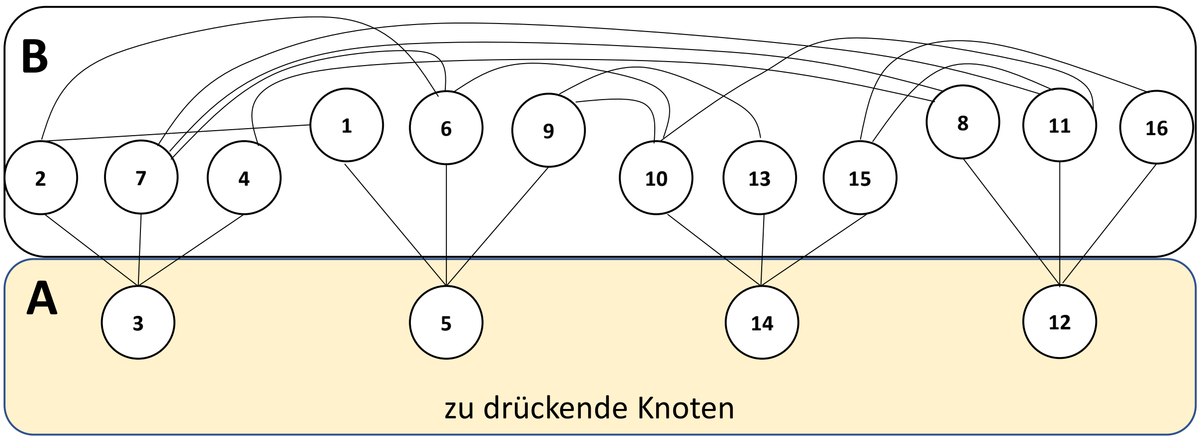


Lösung zu Übungsaufgabe 2.5.





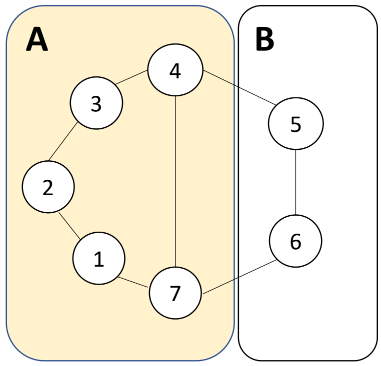




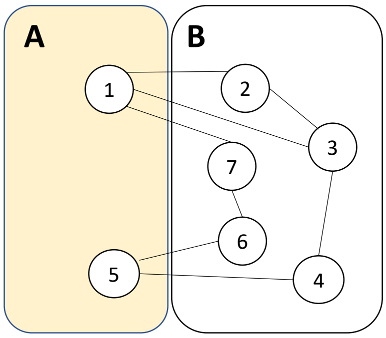
Hinweis: Anstelle der Knoten {3, 5, 12, 14} kann auch die Knotenkombination {2, 8, 9, 15} gewählt werden.

Lösung zu Übungsaufgabe 2.6.

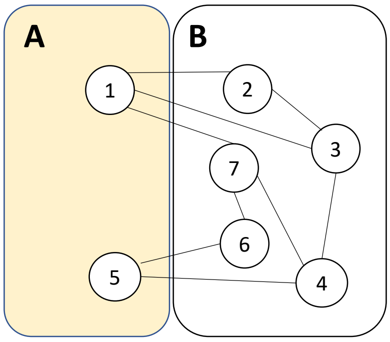
a) Die Gruppe A mit den Knoten 1 bis 4 und 7 bildet für sich einen Kreisgraphen. Alle Knoten haben innerhalb von A genau 2 Nachbarknoten. Drückt man jeden dieser Knoten genau einmal, ändern wegen der beiden Nachbarn alle Knoten von A dreimal ihren Zustand. Gleichzeitig ändern auch die Knoten 5 und 7 ihren Zustand einmal, weil jeder dieser beiden Knoten aus Gruppe B genau einen Nachbarn (nämlich 4 bzw. 7) aus Gruppe A hat. Ist der Graph zuerst ganz ausgeschaltet, ist er also nach einmaligem Drücken jedes Knotens aus A vollständig eingeschaltet.



b)

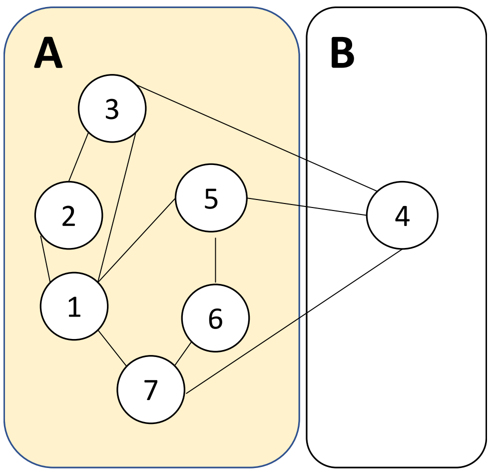


c)



Die Unterteilungen der Graphen in die Gruppen A und B bei den Teilaufgaben b) und c) sind identisch. Die zusätzliche Kante zwischen den Knoten 4 und 7 in Aufgabe c) ändert nichts an der Tatsache, dass die Knoten 1 und 5 in Gruppe A weiterhin keinen (also eine gerade Anzahl) Nachbarn in ihrer eigenen Gruppe haben. Zudem haben die Knoten aus Gruppe B weiterhin alle genau einen (also eine ungerade Anzahl) Nachbarn aus Gruppe A.

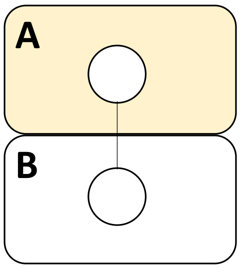
d) Gegenüber dem Graphen aus Aufgabe c) hat der Graph von Aufgabe d) wiederum nur eine zusätzliche Kante, nämlich zwischen den Knoten 1 und 5. Trotzdem ist es diesmal alles andere als offensichtlich, wie die Unterteilung in die Gruppen A und B gelingen kann. Die Kenntnis der Lösung aus Aufgabe c) hilft nicht weiter.
Durch mehr oder weniger systematisches Probieren kommt man auf die abgebildete Lösung. Es ist aber klar, dass Probieren bei grösseren Graphen keine effiziente Strategie zum Auffinden einer Lösung sein kann. In Teil 3 lernen wir deshalb eine andere Methode kennen, mit der sich das «Lights On»-Problem für jeden beliebigen Graphen lösen lässt.



Lösung zu Lernaufgabe 3.1.

a) $n = 2$:

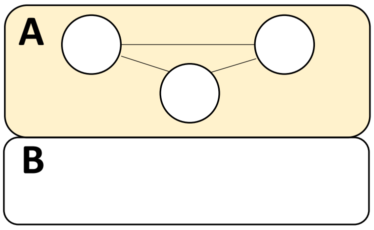
Die beiden Knoten müssen in verschiedenen Gruppen sein. So haben sie 0 Nachbarn innerhalb ihrer eigenen Gruppe:



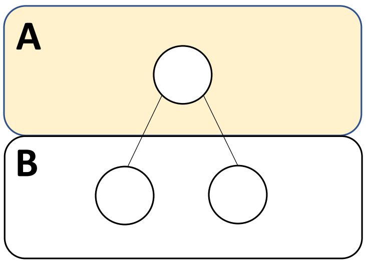
$n = 3$:

Es gibt nur zwei Möglichkeiten.

1. Die drei Knoten sind paarweise verbunden und gehören somit zur gleichen Gruppe. Die andere Gruppe bleibt leer.



2. Ein Knoten hat zwei Nachbarn. Die beiden Nachbarn sind aber untereinander unverbunden. In diesem Fall ist der Knoten mit zwei Nachbarn in einer anderen Gruppe als seine beiden Nachbarn. Alle Knoten haben innerhalb ihrer eigenen Gruppe 0 Nachbarn.



b) Der Knoten L_0 hat wie alle übrigen Knoten (ausser evtl. Knoten Z) eine ungerade Anzahl Nachbarn. In einer der beiden gebildeten Gruppen gibt es somit eine gerade Anzahl Nachbarknoten. Dieser Gruppe wird L_0 zugeordnet. Damit hat der Knoten L_0 wie gefordert innerhalb seiner Gruppe eine gerade Anzahl Nachbarn.

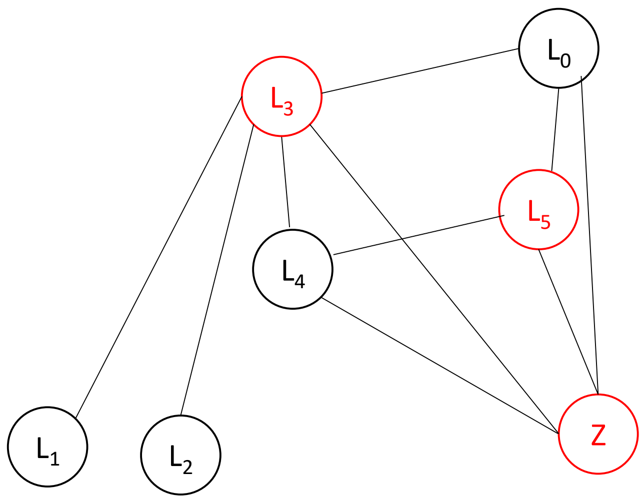
Wir müssen aber noch zeigen, dass alle Nachbarknoten von L_0, d.h. die Knoten L_1, L_2, L_3, …. , ebenfalls weiterhin eine gerade Anzahl Nachbarknoten innerhalb ihrer jeweiligen Gruppen haben. Wir betrachten die beiden Gruppen separat und beginnen mit derjenigen Gruppe, welcher L_0 zugeordnet wird:

In der Gruppe mit L_0 hat jeder Nachbarknoten L_1, L_2, L_3, …. neu eine zusätzliche Verbindung zu L_0. Andererseits werden alle paarweisen Verbindungen zwischen den Nachbarknoten L_1, L_2, L_3,…, geändert: Sind zwei Nachbarknoten L_i, L_j verbunden, wird die Verbindung getrennt. Sind sie hingegen getrennt, werden sie verbunden.

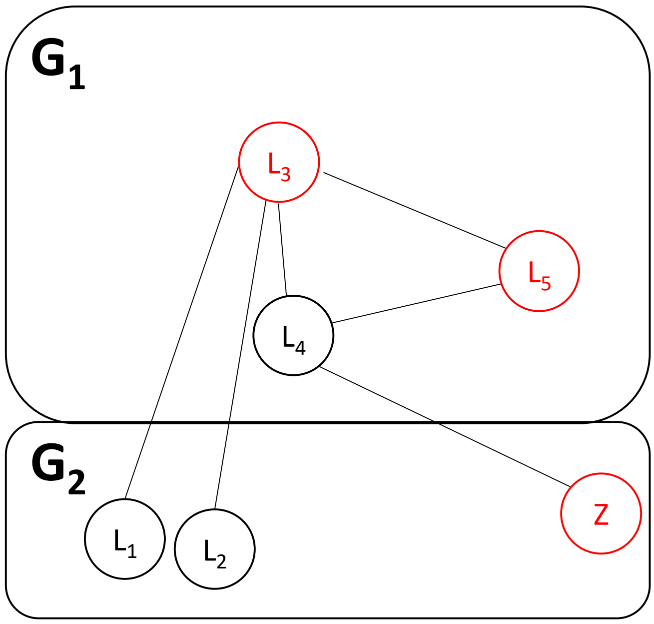
Weil wir die Gruppe von L_0 so gewählt haben, dass der Knoten L_0 eine gerade Anzahl Nachbarknoten innerhalb seiner Gruppe hat, wird durch jede neue Verbindung von L_0 zu einem seiner Nachbarn L_i eine ungerade Anzahl Verbindungen von L_i zu allen übrigen Nachbarknoten von L_0 innerhalb der Gruppe geändert. Es gibt also bei jedem Knoten L_i eine gerade Anzahl Änderungen bei den Verbindungen zu anderen Knoten innerhalb der Gruppe. Die Anzahl der Nachbarn von L_i innerhalb der Gruppe bleibt somit gerade.

Beispiel:

Wir betrachten ein Beispiel eines Graphen mit insgesamt 7 Knoten. Mit Ausnahme des Knotens Z haben alle Knoten eine ungerade Anzahl Nachbarn. Der Knoten L_0 wird nun entfernt, und die Verbindungen von Nachbarknoten von L_0 (d.h. die rot markierten Knoten L_3, L_5 und Z) untereinander werden alle geändert (verbundene Nachbarknoten werden getrennt, unverbundene Nachbarknoten werden neu verbunden).



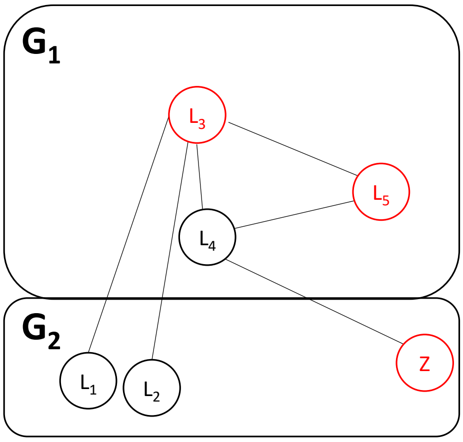
Im nächsten Bild sieht man den resultierenden Graphen mit 6 Knoten. Gemäss Induktionsvoraussetzung kann dieser Graph in zwei Gruppen G_1 und G_2 unterteilt werden, so dass jeder Knoten innerhalb seiner Gruppe eine gerade Anzahl Nachbarn besitzt.



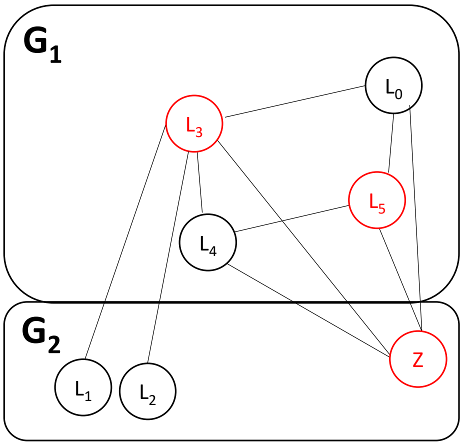
Nun, da wir für den Graphen mit 6 Knoten die Unterteilung kennen, können wir den Knoten L_0 wieder einfügen. Er wird der Gruppe zugeordnet, die zwei seiner Nachbarn enthält, also Gruppe G_1 mit den Knoten L_3 und L_5. Weil beim Einfügen von L_0 auch die paarweisen Verbindungen aller seiner Nachbarn wieder geändert werden müssen, wird die Verbindung zwischen den Knoten L_3 und L_5 untereinander getrennt. Beide Knoten erhalten also je einen neuen Nachbarn (L_0) und verlieren gleichzeitig einen Nachbarn (Knoten L_3 verliert Knoten L_5, und Knoten L_5 verliert Knoten L_3 als Nachbar).

Die Knotenpaare L_3 und L_6 sowie L_5 und Z werden neu verbunden. Dies hat aber keine Auswirkung auf die Anzahl Nachbarn der Knoten innerhalb der Gruppe G_1 mit dem Knoten L_0 :

Graph mit 6 Knoten (ohne L_0)



Ursprünglicher Graph mit 7 Knoten

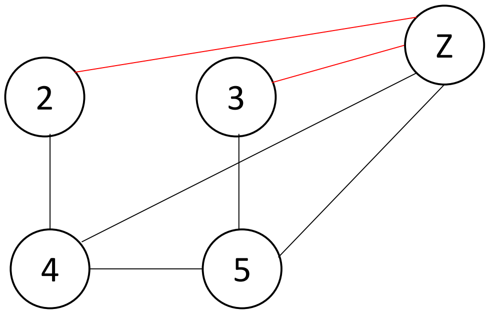


In der anderen Gruppe G_2 hingegen kann der Knoten L_0 nur einen Nachbarknoten haben, denn wir hatten ja L_0 im ursprünglichen Graphen so gewählt, dass er insgesamt eine ungerade Anzahl Nachbarn hat. (In dem Beispiel ist nur der Knoten Z ein Nachbar von L_0 in der Gruppe G_2.) Dadurch ist gewährleistet, dass sich beim Einfügen von L_0 auch innerhalb der Gruppe G_2 die Anzahl Nachbarn pro Knoten in G_2 immer geradzahlig ändert. Vor dem Einfügen von L_0 hat nach Induktionsvoraussetzung jeder Knoten in G_2 eine gerade Anzahl Nachbarn. Dies bleibt auch nach dem Einfügen von L_0 so.

Lösung zu Lernaufgabe 3.2.

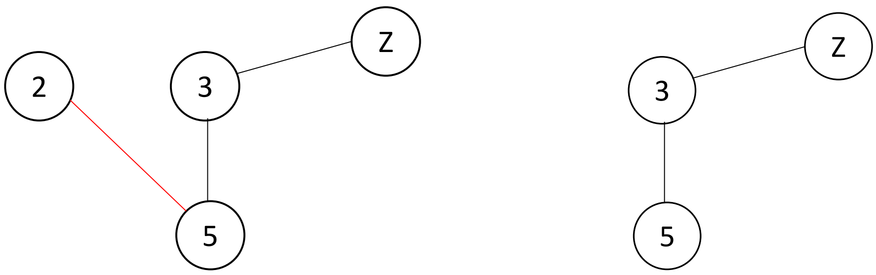
Schritt 2:

Wir entfernen zuerst den Knoten 1. Nach den paarweisen Änderungen von Verbindungen zwischen allen Nachbarn von Knoten 1 sieht das Netz wie abgebildet aus. Neu eingeführte Kanten sind rot gezeichnet.

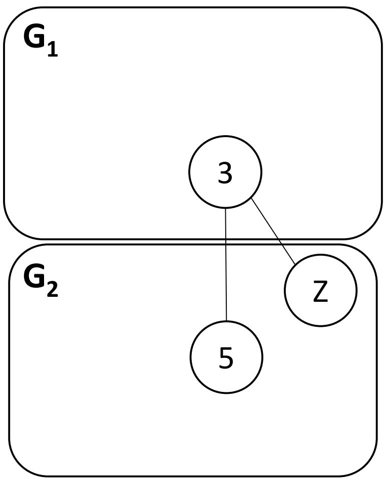


Schritt 3:

Wir entfernen nacheinander die Knoten 4 und 2:



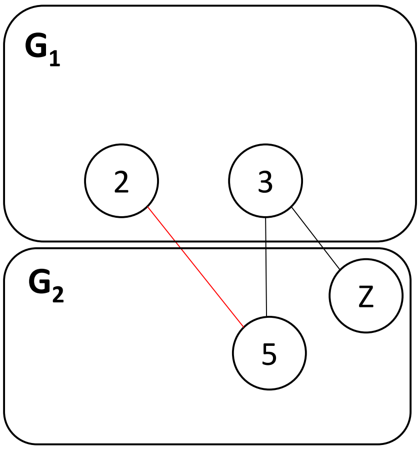
Schritt 4:



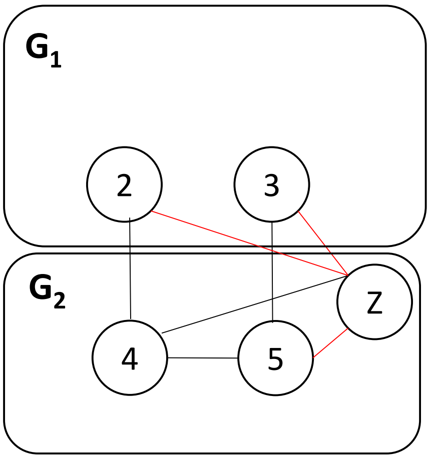
Schritt 5:

Die Knoten 2, 4 und 1 werden nacheinander wieder hinzugefügt. Dabei wird jeweils bestimmt, welcher Gruppe (A oder B) der Knoten zugeordnet werden muss, so dass die Anzahl Nachbarn aller Knoten innerhalb der Gruppe geradzahlig bleibt.

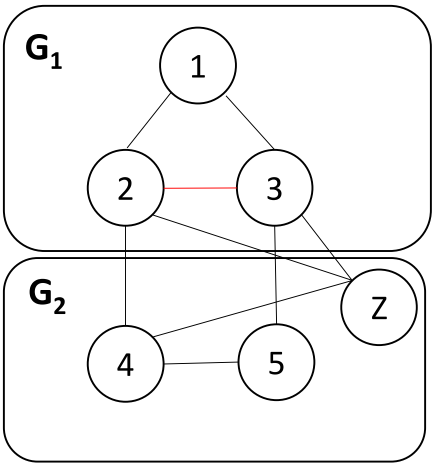
Knoten 2:



Knoten 4:



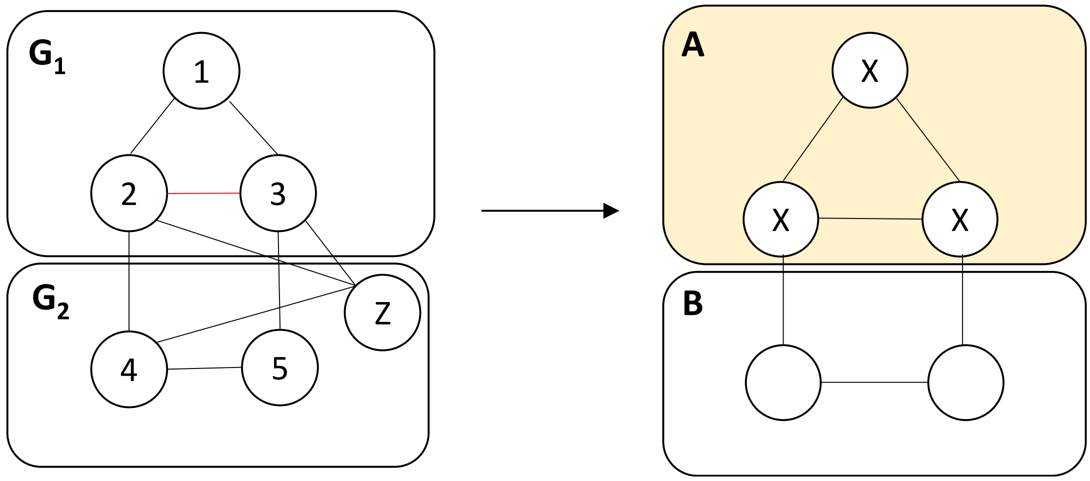
Knoten 1:



Schritt 6:

Der Knoten *Z* befindet sich zum Schluss in Gruppe G_2. Es müssen somit die Knoten 1, 2 und 3 von Gruppe G_1 (in der Figur mit X markiert) gedrückt werden, um das Problem zu lösen.

G_1 ist somit Gruppe A («zu drückende Knoten»), G_2 wird nach Entfernung des Knotens *Z* zu Gruppe B («nicht zu drückende Knoten»).



Lösung zu Übungsaufgabe 3.3.

Es müssen die Knoten 1, 4, 5 und 6 betätigt werden, um das Problem zu lösen. Die Herleitung erfolgt mit Hilfe des Algorithmus aus Lernaufgabe 3.2. Am Schluss von Schritt 5 sieht die Zuordnung zu den Gruppen G_1 und G_2 wie unten links gezeigt aus. Da *Z* in Gruppe G_2 ist, enthält G_1 die zu drückenden Knoten (Gruppe A). In Schritt 6 wird *Z* aus G_2 entfernt. Die verbleibenden Knoten 2 und 3 aus Gruppe G_2 bilden nun die Gruppe B mit den nicht zu drückenden Knoten (Figur rechts).