Fachdidaktik Informatik

Eine Lerneinheit zur vollständigen Induktion

Studierende:
Jonas Balsiger
Sergio Mouzo

Dozierende:
Prof. Dr. Juraj Hromkovic
Regula Lacher

1. Voraussetzungen an die Lerngruppe

Diese Lerneinheit richtet sich an Lerngruppen frühestens ab der zweiten MAR-Stufe. Vor allem der zweite Teil der vorliegenden Lerneinheit setzt einige Grundlagen aus der Informatik sowie weiterführende mathematische Fertigkeiten voraus. Im Folgenden werden die einzelnen Anforderungen kurz separat beleuchtet:

a. <u>Mathematik:</u>
Den Lernenden ist die Beweismethode der vollständigen Induktion bereits bekannt.

Mit Hilfe des ersten Teils der Lerneinheit (Spielen mit Steinen) kann das Prinzip der vollständigen Induktion zwar theoretisch eingeführt werden. Er bietet jedoch kein mathematisches Paradebeispiel für eine Induktion, da die Korrektheit einer Spielstrategie bewiesen wird und nicht die Korrektheit einer mathematischen Formel. Im zweiten Teil (Türme versetzen) wird dann aber der Beweis einer mathematischen Formel verlangt.
Der Lerngruppe sollten also mindestens die Begriffe «Induktionsannahme», «Induktionsverankerung» sowie «Induktionsschritt» bekannt sein. Im Optimalfall haben die Lernenden bereits gelernt, wie sie Vermutungen für Reihenformeln mittels vollständiger Induktion beweisen können.

b. <u>Mathematik:</u>
Die Lernenden haben das Thema «Folgen und Reihen» bereits behandelt.

Der erste Teil (Spielen mit Steinen) lässt sich theoretisch auch ohne die Grundlage der Folgen und Reihen lösen. Doch bereits hier wird vorausgesetzt, dass die Lernenden wissen, wie sich gerade und ungerade Zahlen als Term $T(n \in \mathbb{N})$ *darstellen lassen. Im zweiten Teil (Türme versetzen) werden zudem rekursive und explizite Bildungsvorschriften verlangt.*

c. <u>Informatik:</u>
Die Lernenden können Pythonprogramme, welche die folgenden Konzepte enthalten, lesen, mit dem Computer ausführen sowie mit Papier und Stift abarbeiten:
Variablen, Funktionen mit Parametern, Verzweigungen und Konsole-Ausgaben

Im zweiten Teil der Lerneinheit (Türme versetzen) entwickeln die Lernenden zunächst einen Algorithmus auf Papier, um das Problem «Türme von Hanoi» mit n Scheiben zu lösen. Im Folgenden wir ihnen ein Pythonprogramm vorgelegt, das sie schriftlich abarbeiten sollen.

d. <u>Informatik:</u>
Die Lernenden haben bereits rekursive Algorithmen gesehen und entwickelt.

Im zweiten Teil (Türme versetzen) wird ein rekursiver Algorithmus auf Papier entwickelt sowie der zugehörige, in Python implementierte, Algorithmus abgegeben. Damit die Lernenden davon überzeugt sind, dass ihre Idee (auf Papier) genau dem implementierten Algorithmus entspricht, sollten sie in der Lage sein, rekursive Algorithmen zu lesen und zu verstehen. Zudem wird die Laufzeit des Algorithmus auf verschiedene Arten begründet.

e. Informatik (optional):
Die Lernenden kennen Binärbäume und ihre Eigenschaften.

In der letzten Teilaufgabe des zweiten Teils (Türme versetzen) kann zudem der Bogen zum Thema «Binärbäume» gespannt werden. Wenn die Lernenden bereits wissen, wie sich die Anzahl Knoten eines vollständigen Binärbaumes über die Baumtiefe berechnen lässt, lässt sich dadurch die Laufzeit begründen. Anderenfalls lässt sich der Zusammenhang zwischen Baumtiefe und Anzahl Knoten eines vollständigen Binärbaumes über die vorangegangene Laufzeitanalyse zeigen.

2. Welche Ziele verfolgt die Lerneinheit?

Die vorliegende Lerneinheit soll von den Lernenden so weit wie möglich ohne das Eingreifen der Lehrperson bearbeitet werden können. Die Lehrperson soll nur punktuell sicherstellen, dass einzelne wichtige Teilaufgaben korrekt gelöst wurden (in der Version für Lehrpersonen markiert).
Daneben verfolgt die Lerneinheit im Wesentlichen vier Ziele:

a. Die Lerngruppe kann die vorliegenden Beispiele (Nim-Spiel, Türme von Hanoi) «unplugged» durchspielen und so ein Verständnis für die Problemstellungen und deren Lösungen entwickeln.
b. Die Lerngruppe vertieft auf spielerische Art das Prinzip der vollständigen Induktion.
c. Die Lerngruppe entwickelt durch den Aufbau der Lerneinheit selbständig und ohne es zu merken einen rekursiven Algorithmus.
d. Die Lerngruppe überprüft die Komplexität eines rekursiven Algorithmus mit Hilfe der vollständigen Induktion.

3. Werden die Ziele erreicht? Falls ja: wie?

Werden die Voraussetzungen a. bis d. von der Lerngruppe erfüllt, lässt sich die Lerneinheit von ihr grösstenteils selbständig bearbeiten. Die Aufgaben werden aufbauend gestellt und die Lernenden somit schrittweise zum Ziel geführt.
Trotzdem enthält die Lerneinheit kritische Stellen: es werden im Wesentlichen die beiden Konzepte der vollständigen Induktion sowie der rekursiven Algorithmen angewendet und vertieft, wobei auch das mathematische Thema «Folgen und Reihen» auftritt. Alle diese Themen zählen nicht zu den einfachsten im Curriculum. An einigen Stellen wurden deshalb Hinweise für die Lernenden zusätzlich zur Aufgabenstellung angefügt. Es gibt aber auch Stellen, an denen die Lehrperson um Folgefehler zu vermeiden auf irgendeine Art und Weise sicherstellen muss (Lösungen verteilen, besprechen, Peer-Vergleich), dass die Aufgabe korrekt gelöst wurde (z.B. Aufgaben I.A.1 bis I.A.4 oder Aufgabe II.1.a).

Die vollständige Induktion wird in der vorliegenden Lerneinheit mehrfach angewendet. Während in Teil 1 (Spielen mit Steinen) durch effektives Spielen zunächst pro Regel eine Spielstrategie entwickelt wird und diese mittels Induktion durch Argumentieren bewiesen werden, benutzen die Lernenden das Prinzip der Induktion im zweiten Teil (Türme versetzen) für den Beweis einer mathematischen Aussage.
Die Induktionsbeweise des ersten Teils (Spielen mit Steinen) sind zwar nicht mit mathematischen Termen gespickt, die Argumentation korrekt zu formulieren ist aber keinesfalls einfach, da jeweils mehrere Fälle untersucht und begründet werden müssen.

Im zweiten Teil (Türme versetzen) wird bis zu Aufgabe 6 die Rekursivität nicht explizit angesprochen. Die Schülerinnen und Schüler werden durch die Aufgabenstellungen jedoch auch ohne das Wissen über rekursive Algorithmen angeleitet, einen solchen zu entwickeln. Dadurch, dass sie das vorliegende Optimierungsproblem «unplugged» versuchen zu lösen, lassen sich verschiedene Strategien ausprobieren. Es ist vorstellbar, dass eine Art Wettbewerbscharakter entsteht («Ich schaffe es mit weniger Bewegungen als du!»), was einerseits dem Charakter eines Optimierungsproblems entspricht. Andererseits werden dadurch die Lernenden sehr wahrscheinlich auf die optimale Lösung kommen. Spätestens mit Aufgabe II.3 sollte die Lösung klar werden. Bis und mit Aufgabe 5 stellt das Wissen über rekursive Algorithmen also keine Voraussetzung dar.
Der Einsatz eines Rekursionsbaumes zur einfachen Visualisierung, kann das Bilden eines Verständnisses für die Funktionsweise des rekursiv implementierten Algorithmus zusätzlich unterstützen.

Ebenfalls im zweiten Teil (Türme versetzen) analysieren die Lernenden den in Python implementierten Algorithmus. Dies geschieht hier auf zwei Arten:
Einerseits haben die Lernenden die Komplexität ihrer eigenen Strategie bereits induktiv bewiesen. Für den Beweis der Komplexität des vorliegenden Python-Algorithmus reicht es somit zu zeigen, dass das Python-Programm genau das macht, was sich die Lernenden im Vorgang überlegt haben.
Andererseits lassen sich mit Hilfe des erstellten Rekursionsbaumes die rekursiv definierte Komplexität (Aufgabe II.7.ii) und im Zusammenhang mit Binärbäumen auch die explizit definierte Komplexität (Aufgabe II.7.iii) beweisen. Die explizite Komplexität lässt sich jedoch auch direkt mit Hilfe der rekursiven Komplexität in Verbindung mit der Beweisführung aus Aufgabe II.5 belegen.

Arbeitsblätter inkl. Kommentar «Lehrpersonen»

I. Spielen mit Steinen

Kommentar für Lehrpersonen:

Das kurze Intro vor dem Abschnitt «Nimm 1!» soll die einfache Durchführbarkeit des anschliessenden Spiels thematisieren – als Anreiz, um es bei Gelegenheit auch tatsächlich in der Freizeit mit Freunden zu spielen. Der Fokus wird bewusst auf den Spielspass gelenkt, damit sich die Schülerinnen und Schüler entspannt darauf einlassen können, ohne bereits in den Einstiegsaufgaben zu viel Zeit und Energie auf die optimale Gewinnstrategie zu stecken. Diese soll Schritt für Schritt entwickelt werden und sich aus den Erfahrungswerten ergeben.

Im Folgenden wird ein Spiel für zwei Personen vorgestellt, welches einfach erklärt ist und dazu mit wenigen Hilfsmitteln auskommt. Ein Spiel sowohl für Kinder als auch Erwachsene, das sich beispielsweise perfekt für kurze Zugfahrten zu zweit eignet. Dabei stellt sich die Frage, wie gross der Glücksanteil und wie gross der Kompetenzanteil ist.

Überwiegt die Komponente Glück, so wünschen wir Ihnen viel Erfolg im Spiel. Sollten Sie jedoch eine Gewinnstrategie entwickeln, so bitten wir, Ihren Gegenspielern zuliebe, um rücksichtsvolle Zurückhaltung. In jedem Fall wünschen wir Ihnen aber viel Spass beim Erarbeiten der folgenden Lerneinheit!

Kommentar für Lehrpersonen:

Das sogenannte «Nim-Spiel» kann den Schülerinnen und Schülern eventuell bereits ein Begriff sein, oder zumindest gegoogelt werden, weshalb hier bewusst auf den Eigennamen verzichtet wird. Stattdessen soll der Abschnittsname über die entsprechende Spielvariante Aufschluss geben.

A. Nimm 1!

Spielregeln, Variante 1
Eine beliebige, aber feste Anzahl von Steinen liegen ausgebreitet. Zwei Spieler nehmen abwechselnd immer genau einen Stein weg. Der Spieler, der den letzten Stein wegnehmen muss, hat verloren.

Spielen Sie das Spiel gegen eine Mitschülerin oder einen Mitschüler. Statt Steine nehmen Sie besser ein paar Schreibstifte (Zahnstocher, Streichhölzer, etc.) zur Hand und legen Sie auf Ihren Schreibtisch. Sollten Sie für Ihren Geschmack zu wenige Gegenstände zum Spielen besitzen, können Sie auch Striche auf ein Papier zeichnen, die es stattdessen durchzustreichen gilt.

Kommentar für Lehrpersonen:

Es ist davon auszugehen, dass die meisten Schülerinnen und Schüler diese einfache Spielvariante auch gedanklich gegen sich selbst spielen und so die folgenden Fragen beantworten könnten. Die frühe Aufforderung gegen jemanden zu spielen, soll jedoch nochmals den Spielfaktor in den Fokus rücken und die Gruppenbildung fördern, die es in den schwierigeren Spielvarianten brauchen wird.

1. Bei welcher Anzahl von Steinen gewinnt der Startspieler? Bei welcher Anzahl von Steinen verliert er? Formulieren Sie Ihre Vermutung.
   → Induktionsannahme **(IA)**

Lösungsvorschlag:

Bei einer geraden Anzahl $(2n, n \in \mathbb{N})$ von Steinen gewinnt der Startspieler.
Andernfalls $(2n - 1, n \in \mathbb{N})$ verliert er.

2. Spielen Sie das Spiel mit 1 und mit 2 Steinen durch, um Ihre Vermutung zu überprüfen. Beschreiben Sie das Spielgeschehen, jeweils aus Sicht des Startspielers, genau in Worte.
→ Induktionsverankerung **(IV)**

Lösungsvorschlag:

1 Stein:
Der Startspieler nimmt den einzigen Stein weg und verliert.

2 Steine:
Der Startspieler nimmt einen Stein weg, lässt nur noch einen übrig und bringt den anderen Spieler somit in die Verliererposition. Der Startspieler gewinnt.

Kommentar für Lehrpersonen:

Die Schülerinnen und Schüler haben, bewusst oder unbewusst, zwei (!) Induktionsannahmen getroffen und zwei Induktionsverankerungen durchgeführt. Sie beide gehen zwar Hand in Hand, im Folgenden sollen jedoch beide unabhängig voneinander betrachtet werden. Das schafft Klarheit und gibt die Möglichkeit, den Induktionsschritt gleich zweimal an zwei ähnlichen Beispielen zu üben.

Wie Sie wahrscheinlich bereits vermuteten, gewinnt der Startspieler bei einer geraden Anzahl von Steinen **(IA)**. Sie haben dies effektiv aber erst für 2 Steine nachgewiesen **(IV)**.

3. Angenommen Ihre Vermutung gilt für eine bestimmte gerade Anzahl von Steinen. Begründen Sie in Worte, warum Ihre Vermutung auch für die nächstgrössere gerade Zahl gilt.
→ Induktionsschritt **(IS)**
Hinweis: Überlegen Sie sich, wie man gerade Zahlen als mathematischen Term darstellt und wie zwei aufeinanderfolgende gerade Zahlen miteinander zusammenhängen.

Lösungsvorschlag:

(IA) Der Startspieler gewinnt bei $2n$ $(n \in \mathbb{N})$ Steinen.
(IV) Der Startspieler gewinnt bei $2 \cdot 1 = 2$ Steinen.
(IS) $n \rightarrow n + 1$
Der Startspieler nimmt von $2(n + 1) = 2n + 2$ Steinen einen weg und es bleiben noch $2n + 2 - 1 = 2n + 1$ Steine übrig. Nach dem Zug des Gegenspielers bleiben noch $2n + 1 - 1 = 2n$ Steine übrig und der Startspieler gewinnt gemäss **(IA)**.

Kommentar für Lehrpersonen:

Da die Aufgabe 4 analog zur Aufgabe 3 ist, kann man diese den etwas schnelleren Schülerinnen und Schülern überlassen, währenddem man sicherstellt, dass die Aufgabe 3 von allen verstanden wurde.

Wie Sie wahrscheinlich bereits vermuteten, verliert der Startspieler bei einer ungeraden Anzahl von Steinen **(IA)**. Sie haben dies effektiv aber erst für 1 Stein nachgewiesen **(IV)**.

4. Angenommen Ihre Vermutung gilt für eine bestimmte ungerade Anzahl von Steinen. Begründen Sie in Worte, warum Ihre Vermutung auch für die nächstgrössere ungerade Zahl gilt.
   → Induktionsschritt **(IS)**
   Hinweis: Überlegen Sie sich, wie man ungerade Zahlen als mathematischen Term darstellt und wie zwei aufeinanderfolgende ungerade Zahlen miteinander zusammenhängen.

Lösungsvorschlag:

(IA) Der Startspieler verliert bei $2n-1$ $(n \in \mathbb{N})$ Steinen.
(IV) Der Startspieler verliert bei $2 \cdot 1 - 1 = 1$ Stein.
(IS) $n \rightarrow n+1$
Der Startspieler nimmt von $2(n+1)-1 = 2n+1$ Steinen einen weg und es bleiben noch $2n+1-1 = 2n$ Steine übrig. Nach dem Zug des Gegenspielers bleiben noch $2n-1$ Steine übrig und der Startspieler verliert gemäss **(IA)**.

5. **Zusatzaufgabe:** Wie kann man den Beweis des Induktionsschrittes in Aufgabe 4, mithilfe der bereits bewiesenen Induktionsannahme aus Aufgabe 3, abkürzen?

Lösungsvorschlag:

Durch Perspektivenwechsel: weg vom Startspieler, hin zum Gegenspieler.

(IS) $n \rightarrow n+1$
Der Startspieler nimmt von $2(n+1)-1 = 2n+1$ Steinen einen weg und es bleiben noch $2n+1-1 = 2n$ Steine übrig. Gemäss der Induktionsannahme aus Aufgabe 3 ist nun der Gegenspieler in der Gewinnerposition und somit der Startspieler in der Verliererposition.

Kommentar für Lehrpersonen:

Der Teil A sollte mit der Klasse besprochen werden, bevor zu Teil B gewechselt wird. Somit wird sichergestellt, dass die ganze Klasse den Induktionsbeweis dieser ersten, einfachen Spielvariante verstanden hat. Alternativ bzw. ergänzend kann der Lösungsvorschlag dazu verteilt werden.

B. Nimm 1 oder 2!

<u>*Spielregeln, Variante 2*</u>
Nun haben die beiden Spieler jeweils die Wahl, entweder einen oder zwei Steine wegzunehmen. Weiterhin hat derjenige Spieler verloren, der den letzten Stein wegnehmen muss.

Spielen Sie das Spiel erneut gegen eine Mitschülerin oder einen Mitschüler und finden Sie auf spielerische Art heraus, inwiefern sich der Glücksanteil und der Kompetenzanteil, im Vergleich zur vorherigen Variante, verändert hat.

1. Tun Sie sich zu zweit zusammen und entscheiden Sie, wer Spieler A und wer Spieler B ist. Spielen Sie das Spiel über insgesamt 20 Spielrunden in der von der Tabelle vorgegebenen Reihenfolge und notieren Sie dabei jeweils, welcher Spieler das Spiel gewonnen hat. Beachten Sie, dass das Recht des ersten Startspielers mit jedem weiteren Stein wechselt.

Spielrunde	Steine	Startspieler	Sieger
1	1	A	
2		B	
3	2	B	
4		A	
5	3	A	
6		B	
7	4	B	
8		A	
9	5	A	
10		B	
11	6	B	
12		A	
13	7	A	
14		B	
15	8	B	
16		A	
17	9	A	
18		B	
19	10	B	
20		A	

Kommentar für Lehrpersonen:

Wenn sich der Startspieler geschickt anstellt, so sollte er mindestens 6 von 10 Partien gewinnen. Kleine Unachtsamkeiten rächen sich jedoch und obendrauf kann es der Gegenspieler, bei gleichbleibender Anzahl von Steinen, im Anschluss besser machen. Um den Spielspass und die Fairness zu erhöhen, wechselt daher das Recht des ersten Startspielers mit jedem weiteren Stein.

Das Spiel kann auch über mehr als 20 Runden gespielt werden. Die Tabelle kann dafür bei Bedarf einfach angepasst werden. Je mehr Runden, desto deutlicher wird vermutlich der Induktionsschritt und somit die Gewinnstrategie, desto grösser ist aber auch der Zeitaufwand.

Studieren Sie das obige Resultatblatt und vergleichen Sie bei Bedarf mit anderen Gruppen. Sie dürfen, auf der Suche nach einer besseren Gewinnquote, das Spiel beliebig oft auch gegen andere Mitschülerinnen und Mitschüler spielen.

2. Schreiben Sie aus Sicht des Startspielers die Gewinnstrategie in Worte auf, für den Fall, dass mit 1, 2, …, 10 Steinen gespielt wird. Wie oft sollte der Startspieler mindestens gewinnen?

Lösungsvorschlag:

Startet man mit 1 Stein, hat man offensichtlich verloren.
Im Fall von 2 bzw. 3 Steinen, nimmt man 1 bzw. 2 Steine weg, damit nur noch 1 Stein übrigbleibt und der Gegenspieler in der Verliererposition ist.
Startet man mit 4 Steinen, kann man nur auf 2 oder 3 Steine reduzieren, womit der Gegenspieler in der Gewinnerposition ist.
Im Fall von 5 bzw. 6 Steinen, nimmt man 1 bzw. 2 Steine weg, damit nur noch 4 Steine übrigbleiben und der Gegenspieler in der Verliererposition ist.
Startet man mit 7 Steinen, kann man nur auf 5 oder 6 Steine reduzieren, womit der Gegenspieler in der Gewinnerposition ist.
Im Fall von 8 bzw. 9 Steinen, nimmt man 1 bzw. 2 Steine weg, damit nur noch 7 Steine übrigbleiben und der Gegenspieler in der Verliererposition ist.
Startet man mit 10 Steinen, kann man nur auf 8 oder 9 Steine reduzieren, womit der Gegenspieler in der Gewinnerposition ist.

Der Startspieler sollte mindestens in den Fällen 2, 3, 5, 6, 8 und 9, also in 6 von 10 Fällen, gewinnen.

3. Versuchen Sie ein Muster zu finden und überlegen Sie sich dann, wer mit 49, 50, 100 und 105 Steinen gewinnt, vorausgesetzt beide Spieler haben die Gewinnstrategie durchschaut.

Kommentar für Lehrpersonen:

Die Zahlenbeispiele sind absichtlich etwas grösser gewählt, damit man nicht in sinnvoller Zeit wie in Aufgabe 2 vorgehen kann. Wer das «Muster» (unsere anschliessende Induktionsannahme) nicht findet, wird sich sehr wahrscheinlich bei einer Mitschülerin oder einem Mitschüler Hilfe holen.

Lösungsvorschlag:

Der Startspieler gewinnt mit 50 und 105, und verliert mit 49 und 100 Anfangssteinen.

4. Bei welcher Anzahl von Steinen gewinnt der Startspieler? Bei welcher Anzahl von Steinen verliert er? Formulieren Sie Ihre Vermutung.
   → Induktionsannahme **(IA)**

Lösungsvorschlag:

Bei $3n + 1$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ Steinen verliert der Startspieler. Andernfalls gewinnt er.

5. Beweisen Sie Ihre Vermutung mit vollständiger Induktion. Gehen Sie gleich vor wie in Teil A.
   Hinweis: Beginnen Sie mit den Fällen, in denen der Startspieler verliert.

Lösungsvorschlag:

(IA) Bei $3n + 1$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ Steinen verliert der Startspieler
(IV) Bei $3 \cdot 0 + 1 = 1$ Stein verliert der Startspieler, gemäss Aufgabe 2.
(IS) $n \rightarrow n + 1$
Bei $3(n + 1) + 1 = 3n + 4$ Steinen kann der Startspieler nur entweder auf $3n + 4 - 1 = 3n + 3$ oder auf $3n + 4 - 2 = 3n + 2$ Steine reduzieren. In beiden Fällen kann der Gegenspieler seinerseits auf $3n + 3 - 2 = 3n + 2 - 1 = 3n + 1$ Steine reduzieren, also verliert der Startspieler gemäss **(IA)**.

(IA) Bei nicht $3n + 1$, also bei $3n + 2$ und bei $3n + 3$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ Steinen gewinnt der Startspieler.
(IV) Bei $3 \cdot 0 + 2 = 2$ und bei $3 \cdot 0 + 3 = 3$ Steinen gewinnt der Startspieler, gemäss Aufgabe 2.
(IS) $n \rightarrow n + 1$
Sowohl bei $3(n + 1) + 2 = 3n + 5$ als auch bei $3(n + 1) + 3 = 3n + 6$ Steinen kann der Startspieler auf $3n + 5 - 1 = 3n + 6 - 2 = 3n + 4$ Steine reduzieren. Nimmt der Gegenspieler 1 Stein weg, landet man im Fall $3n + 3$, andernfalls im Fall $3n + 2$, also gewinnt der Startspieler gemäss **(IA)**.

Kommentar für Lehrpersonen:

Die nachfolgende und abschliessende Zusatzaufgabe soll der Festigung dienen. Sie mag vielleicht einfacher als der vorherige Beweis durch vollständige Induktion sein, doch erfordert sie ein erhöhtes Verständnis für die vorangegangenen Aufgaben. Zudem ist es ein gutes Feedback für die Klasse, denn wenn man etwas nicht einfach erklären kann, hat man es (vermutlich) nicht verstanden.

6. **Zusatzaufgabe:** Formulieren Sie die Spielregeln so um, dass der Startspieler immer gewinnen kann, wenn die Anzahl von Steinen nicht $5m + 1$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ beträgt.
   Erklären Sie danach einer Mitschülerin oder einem Mitschüler mündlich, warum dies gilt.

Spielregeln, Variante 3

Lösungsvorschlag:

Die Spieler haben jeweils die Wahl, entweder 1, 2, 3 oder 4 Steine zu entfernen.

Erklärungsansatz, ohne Anspruch auf Vollständigkeit: Nimmt ein Spieler 1, 2, 3 oder 4 Steine weg, so kann der andere Spieler seinerseits 4, 3, 2 oder 1 Steine wegnehmen. In allen Fällen wird die Anzahl von Steinen in Fünferschritten reduziert. Bleibt 1 Stein am Ende übrig, verliert derjenige Spieler, der zuletzt an der Reihe ist.

II. Türme versetzen

Kommentar für Lehrpersonen:

«Türme von Hanoi» kann den Schülerinnen und Schülern eventuell bereits ein Begriff sein, oder zumindest gegoogelt werden, weshalb hier bewusst auf den Eigennamen verzichtet wird. Wer dennoch auf Anhieb die Aufgabe wiedererkennt, kann ja wahlweise die anschliessenden Spielregeln getrost überspringen.

Für manche Kinder ist «Türme von Hanoi» tatsächlich noch ein Spiel. Dann geht es nicht darum, den Turm in möglichst wenig Zügen oder möglichst schnell von A nach C zu versetzen. Sie sind sich vielleicht noch unschlüssig, ob das Vorhaben überhaupt gelingen kann und sind einfach nur froh, wenn sie es irgendwie und irgendwann schaffen. Unsere Schülerinnen und Schüler werden vermutlich bereits durchschaut haben, dass das vermeintliche Spiel eine Optimierungsaufgabe ist – eventuell ist es aber klug, dies nicht von Anfang an preiszugeben. Auch hier soll nämlich spielerisch zuerst eine optimale Gewinnstrategie Schritt für Schritt entwickelt, und anschliessend natürlich bewiesen werden. Und selbst dann kann man die Aufgabe noch als Spiel verkaufen, indem man Personen gegeneinander antreten und auf Zeit spielen lässt, um die Geschicklichkeit der Hände zu testen.

Jedem Schüler und jeder Schülerin wird ein Bastelbogen ausgehändigt, damit das Spiel unplugged, also ohne Zuhilfenahme eines Computers, gespielt werden kann. Wir wollen das Spiel wortwörtlich greifbar machen und sowohl die Gewinnstrategie als auch den Algorithmus von Hand erarbeiten lassen. Der Computer soll erst ganz am Ende zum Einsatz kommen, wenn der fertige Algorithmus (in der Programmiersprache Python) vorgestellt wird.

Die ersten beiden Seiten stellen die Spielfelder dar, wobei die drei Stäbe **A**, **B** und **C** durch drei etwas grössere schwarze Scheiben modelliert wurden. Diese kann man ohne Bedenken doppelseitig kopieren, da man immer jeweils nur ein Spielfeld braucht. Die Scheiben 1 bis 5 müssen mit einer Schere ausgeschnitten werden. Falls die Vorlage also ans Ende des Skripts angehängt oder in irgendeiner Weise verändert wird, ist darauf zu achten, dass die Rückseite leer bleibt.

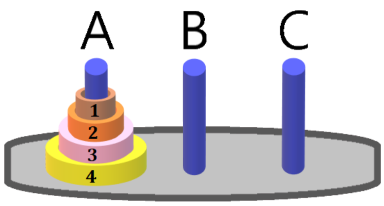
Sie erhalten mit diesem Skript auch ein Bastelbogen, um das Spiel «unplugged» spielen zu können. Die ersten beiden Seiten, mit den jeweils drei grossen schwarzen Scheiben darauf, sind Spielfelder. Schneiden Sie nun mit einer Schere die Scheiben, die von 1 bis 5 durchnummeriert sind, aus und breiten Sie anschliessend alle Spielutensilien vor sich aus.

Sobald die Bastelarbeit getan ist, lesen Sie bitte die Spielregeln sorgfältig durch und lösen dann die anschliessenden Aufgaben.

Spielregeln

*Das Spiel besteht aus drei gleich grossen Stäben **A**, **B** und **C**, auf die mehrere gelochte Scheiben gelegt werden, alle verschieden gross. Zu Beginn liegen alle Scheiben auf Stab **A**, der Grösse nach geordnet, mit der grössten Scheibe unten und der kleinsten oben. Ziel des Spiels ist es, den kompletten Scheiben-Stapel von **A** nach **C** zu versetzen.*

In folgender Grafik ist beispielhaft die Anfangssituation mit 4 Scheiben dargestellt:



Bei jedem Zug darf die oberste Scheibe eines beliebigen Stabes unter der Voraussetzung, dass sich dort nicht schon eine kleinere Scheibe befindet, auf einen der beiden anderen Stäbe gelegt werden. Folglich sind zu jedem Zeitpunkt des Spieles die Scheiben auf jedem Feld der Grösse nach geordnet.

1. Spielen Sie das Spiel für sich, mit **1**, **2**, **3** und **4 Scheiben**, auf dem **Spielfeld 1** durch.
   a. Schreiben Sie jeweils in die Tabelle, wie viele Bewegungen Sie dafür benötigt haben.

# Scheiben	# Bewegungen
1	
2	
3	
4	

   b. Vergleichen Sie danach mit anderen. Hat jemand weniger Bewegungen benötigt? Notieren Sie sich allenfalls die neue, kleinere Zahl und spielen Sie das Spiel nochmals.

Bevor Sie zu den nächsten Aufgaben schreiten, stellen Sie sicher, dass Sie durch Vergleich mit Ihren Mitschülerinnen und Mitschülern, tatsächlich die minimale Anzahl von Bewegungen in den ersten vier Fällen gefunden haben.

Lösungsvorschlag:
(#Scheiben/#Bewegungen): (1/1); (2/3); (3/7); (4/15)

Kommentar für Lehrpersonen:

Im Hinblick auf den ganz am Ende vorgestellten Algorithmus ist es enorm wichtig, dass die Rollen von Start-, Ziel- und «Zwischen»-Stab flexibel vertauscht werden können. Dies im Wissen, dass das Spiel in jedem Fall dasselbe bleibt. Das Spielfeld 2 ist entsprechend symmetrisch im Dreieck angeordnet und mit ungeordneten Symbolen benannt, um keine feste Reihenfolge zu suggerieren.

2. Spielen Sie das Spiel für sich, mit **3 Scheiben**, auf dem **Spielfeld 2** durch.
   a. Wählen Sie zuerst aus den drei Symbolen einen Start-Stab und einen Ziel-Stab aus:

      Start-Stab:  Ziel-Stab: 

   b. Fassen Sie in Worte, welche Rolle dem dritten Stab zukommt und inwiefern sich das Spiel auf **Spielfeld 2** im Vergleich zum vorherigen Spiel auf **Spielfeld 1** verändert hat. Vergleichen Sie mit jemandem, der sich für andere Symbole entschieden hat.

Lösungsvorschlag:

a) Individuell.
b) Der dritte Stab kann als «Zwischen»- oder «Hilfe»-Stab angesehen werden und nimmt die Rolle von Stab B aus Spielfeld 1 an. Ansonsten ist das Spiel dasselbe.

Die folgenden Aufgaben werden weiterhin auf **Spielfeld 2** gespielt. Sie benötigen das **Spielfeld 1** erst wieder am Schluss, in Kombination mit dem vorgestellten Algorithmus, programmiert in Python.

3. Legen Sie **4 Scheiben**, der Grösse nach geordnet, auf einen Start-Stab Ihrer Wahl. Angenommen Sie wollen erstmal nicht das Spiel meistern, sondern lediglich der untersten Scheibe einen neuen Anstrich verpassen. Dies weiterhin unter Einhaltung der Spielregeln.
   a. Wie viele Bewegungen benötigen Sie mindestens, um die obersten drei Scheiben auf einen neuen Stab zu versetzen und somit die vierte Scheibe freizulegen?
   b. Nachdem Sie diese Scheibe neu bemalt haben, wie viele Bewegungen benötigen Sie, um wieder in die ursprüngliche Ausgangslage zu gelangen?
   c. Wählen Sie einen Ziel-Stab und spielen Sie das Spiel für sich mit 4 Scheiben durch. Fassen Sie in Worte, welche Parallelen Sie zu den Teilaufgaben a) und b) feststellen und wie man also das Problem mit 4 Scheiben auf jenes mit 3 Scheiben zurückführt.

Lösungsvorschlag:

a) 7
b) 7
c) Um die unterste Scheibe zu bewegen, muss sie zuerst freigelegt werden und der Ziel-Stab leer sein. Das entspricht genau Teilaufgabe a). Die unterste Scheibe wird bewegt statt angemalt. Der kleinere Turm mit 3 Scheiben folgt der vierten Scheibe auf den Ziel-Stab. Das entspricht genau Teilaufgabe b), wobei nicht wichtig ist, auf welchem Stab Scheibe 4 liegt. Um einen Turm mit 4 Scheiben von A nach C zu bewegen, muss man zuerst den Turm mit 3 Scheiben nach B versetzen, die unterste Scheibe nach C bewegen und dann den Turm aus B folgen lassen.

Sie haben das Spiel nun mehrfach mit 1 bis 4 Scheiben gespielt. In Aufgabe 1 haben Sie die dafür benötigte Mindestanzahl von Bewegungen notiert und in Aufgabe 2 vermutlich bereits festgestellt, dass die Rollen der Stäbe beliebig vertauscht werden können, ohne den Spielmechanismus grundsätzlich zu verändern. In Aufgabe 3 haben Sie das Problem mit 4 Scheiben auf das Problem mit 3 Scheiben zurückgeführt und somit den Grundstein für den Induktionsschritt gelegt. Wir wollen auf dieser Basis einige Beziehungen mathematisch beschreiben und beweisen.

Kommentar für Lehrpersonen:

In Aufgabe 4c) wollen wir auf die Gleichung $B(n+1) = 2 \cdot B(n) + 1$ hinaus. Diese Gleichung soll den Schülerinnen und Schülern zu einem besseren und schnelleren Verständnis des am Ende vorgestellten Algorithmus verhelfen. Es ist jedoch nicht auszuschliessen, dass jemand $B(n+1) = B(n) + 2^n$ schreibt. Mathematisch gesehen sind beide Gleichungen korrekt und im Hinblick auf die Aufgabe 5 ist es sicher wertvoll, wenn man auch diese Lösung aufgreift. Setzt man nämlich beide rekursive Bildungsvorschriften gleich, resultiert ganz einfach die explizite Bildungsvorschrift:

$$B(n+1) = 2 \cdot B(n) + 1 = B(n) + 2^n \Leftrightarrow B(n) + 1 = 2^n \Leftrightarrow B(n) = 2^n - 1$$

4. Mathematisch kann man die Mindestanzahl von Bewegungen als Funktion B in Abhängigkeit der Anzahl Scheiben betrachten. Sei also n die Anzahl Scheiben und $B(n)$ die Mindestanzahl von Bewegungen in Abhängigkeit von n.
   a. Vervollständigen Sie, in Anlehnung an Aufgabe 1, die nachfolgende Tabelle:

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{B(n)}$
1	
2	
3	
4	

   b. Finden Sie, in Anlehnung an Aufgabe 3, eine rekursive Bildungsvorschrift, wie man $B(4)$ in Abhängigkeit von $B(3)$ bestimmen kann.

   $B(4) =$ ....

   c. Finden Sie nun eine rekursive Bildungsvorschrift, wie man $B(n+1)$ allgemein, d.h. mit $n \in \mathbb{N}$, in Abhängigkeit von $B(n)$ bestimmen kann, wobei $B(1) = 1$ gilt.

   $B(n+1) =$ .... $(n \in \mathbb{N})$

   d. Überprüfen Sie mithilfe der Tabelle aus Teilaufgabe a), ob die Bildungsvorschrift für $n \in \{2; 3; 4\}$ gilt und versuchen Sie, von $B(1) = 1$ ausgehend, zu begründen, warum die jeweiligen Lösungen optimal sind, d.h. die Anzahl von Bewegungen minimal ist.

   e. Berechnen Sie $B(5) =$ .... und spielen Sie das Spiel für sich mit **5 Scheiben** durch.

Lösungsvorschlag:

a) $B(1) = 1; B(2) = 3; B(3) = 7; B(4) = 15$
b) $B(4) = 2 \cdot B(3) + 1$
c) $B(n+1) = 2 \cdot B(n) + 1$
d) Argumentation ohne Anspruch auf Vollständigkeit, mithilfe von vollständiger Induktion: Das Spiel mit 1 Scheibe kann nicht in weniger als 1 Bewegung beendet werden. Das Problem mit $n+1$ Scheiben wird optimal gelöst, wenn das Problem mit n Scheiben zweimal optimal gelöst wird, zusätzlich einer Bewegung für die jeweils unterste Scheibe.
e) $B(5) = 2 \cdot B(4) + 1 = 2 \cdot 15 + 1 = 31$

Sie haben nun erstmals das Spiel von Hand mit 5 Scheiben gespielt und dabei sicher festgestellt, dass der Aufwand mit jeder zusätzlichen Scheibe rasant ansteigt. Aus diesem Grund soll es jetzt auch rein theoretisch weitergehen.

5. Sie haben in Aufgabe 4 eine rekursive Bildungsvorschrift für die minimale Anzahl von Bewegungen in Abhängigkeit der Anzahl von Scheiben gefunden. Gesucht ist nun eine explizite Bildungsvorschrift.
   a. Berechnen Sie als Aufwärmübung die folgenden Zweierpotenzen:

$2^0 =$	
$2 \cdot 2^0 = 2^1 =$	
$2 \cdot 2^1 = 2^2 =$	
$2 \cdot 2^2 = 2^3 =$	
$2 \cdot 2^3 = 2^4 =$	
$2 \cdot 2^4 = 2^5 =$	

   b. Vervollständigen Sie, in Anlehnung an Aufgabe 4, die nachfolgende Grafik:

$B(1) =$	$+1$ ·2	$= 2^0$ ·2	$= 1$
$B(2) =$	$+1 \quad +2$	$= 2^0 + 2^1$	$= 3$
$B(3) =$	$+1 \quad +2 \quad +4$	$=$	$=$
$B(4) =$		$=$	$=$
$B(5) =$		$=$	$=$

   c. Beschreiben Sie $B(n)$ mithilfe des Summenzeichens als Summe von Zweierpotenzen:

$$B(n) =$$

   d. Vergleichen Sie die Zweierpotenzen aus Teilaufgabe a) mit den resultierenden Zahlenwerten von $B(n)$ aus Teilaufgabe b) für $n \in \{1,2,3,4,5\}$.
   Finden Sie eine explizite Bildungsvorschrift für $B(n)\ \forall n \in \mathbb{N}$:

$$B(n) =$$

e. Stellen Sie durch Vergleich mit Ihren Mitschülerinnen und Mitschülern sicher, dass Teilaufgabe c) und d) korrekt sind und beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass die beiden Ausdrücke $\forall n \in \mathbb{N}$ gleich sind.
Hinweis: Sie können im Induktionsschritt entweder die Summe, wie sonst üblich, manipulieren und den letzten Summanden aus der Summe rausziehen, oder die bereits begründete rekursive Bildungsvorschrift aus Teilaufgabe 4c) verwenden.

Lösungsvorschlag:

a)

$2^0 =$	1
$2^1 =$	2
$2^2 =$	4
$2^3 =$	8
$2^4 =$	16
$2^5 =$	32

b)

$$\begin{array}{llllllll}
B(1) = & +1 & & & & & = 2^0 & = 1 \\
B(2) = & +1 & +2 & & & & = 2^0 + 2^1 & = 3 \\
B(3) = & +1 & +2 & +4 & & & = 2^0 + 2^1 + 2^2 & = 7 \\
B(4) = & +1 & +2 & +4 & +8 & & = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 & = 15 \\
B(5) = & +1 & +2 & +4 & +8 & +16 & = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 & = 31
\end{array}$$

c)

$$B(n) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k$$

d) $B(n) = 2^n - 1$

e) **(IA)**

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

(IV) $n = 1$:

$$\sum_{k=0}^{1-1} 2^k = \sum_{k=0}^{0} 2^k = 2^0 = 1 = 2 - 1 = 2^1 - 1$$

(IS) $n \to n + 1$:

<u>Variante 1:</u>

$$\sum_{k=0}^{(n+1)-1} 2^k = \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^n + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n + (2^n - 1) = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{(n+1)} - 1$$

<u>Variante 2:</u>

$$B(n+1) = 2 \cdot B(n) + 1 = 2 \cdot (2^n - 1) + 1 = 2 \cdot 2^n - 2 + 1 = 2^{(n+1)} - 1$$

Sie haben mithilfe der Bastelbögen auf spielerische Art von Hand herausgefunden, was die minimale Anzahl von Bewegungen für n Türme ist, wobei das n überschaubar gross war. Ihr mathematisches Geschick hat Sie schliesslich auch eine rekursive und eine explizite Bildungsvorschrift für die minimale Anzahl von Bewegungen $\forall n \in \mathbb{N}$ aufstellen lassen. Letzteres Wissen wird Ihnen sowohl helfen den folgenden Algorithmus besser und schneller zu verstehen als auch diesen auf Komplexität bzw. auf Laufzeit zu untersuchen. Der Algorithmus ist in der Programmiersprache Python geschrieben und löst die Aufgabe optimal.

Kommentar für Lehrpersonen:

Die Datei ***turm.py*** soll der Klasse zum Download bereitgestellt werden.

6. Speichern Sie die Datei ***turm.py*** auf Ihrem Gerät. Der Code sieht so aus:

```
def turm(scheiben, start, hilfe, ziel):
        if scheiben > 0:
              turm(scheiben - 1, start, ziel, hilfe)
              print("Bewege Scheibe", scheiben, "von", start, "nach", ziel)
              turm(scheiben - 1, hilfe, start, ziel)
```

   a. Studieren Sie den Code und halten Sie die Funktionsweise kurz schriftlich fest. Tun Sie sich anschliessend mit jemandem zusammen und erklären Sie es sich gegenseitig. **Hinweis:** Vergleichen Sie die letzten 3 Zeilen mit den Erkenntnissen aus Aufgabe 3c).

   b. Lassen Sie das Programm mit dem Aufruf `turm(3,"A","B","C")` – optional auch mit `turm(4,"A","B","C")` – laufen und spielen Sie es auf dem **Spielfeld 1** unplugged nach, während der Computer Ihnen die jeweils nächste Bewegung verrät.

Lösungsvorschlag:

a) Falls es keine Scheiben mehr hat, ist die `if`-Bedingung falsch und es wird nichts getan. Ansonsten wird der um 1 kleinere Turm auf den Hilfe-Stab versetzt und die unterste Scheibe auf den Ziel-Stab bewegt, bevor der um 1 kleinere Turm nachzieht.

7. Untersuchen Sie nun die Laufzeit des Programms von Hand in Abhängigkeit der Anzahl von Scheiben. Nehmen Sie dafür an, dass jeder Aufruf von `turm(…,…,…,…)` gratis ist. Zählen Sie nur die Bildschirmausgaben mit, die schlussendlich einer Bewegung entsprechen.

   a. Der Aufruf `turm(1,"A","B","C")` lässt sich folgendermassen veranschaulichen:

Rekursionstiefe 0	Rekursionstiefe 1	Ausgabe (Bewegung)
	`turm(0,"A","C","B")`	---
`turm(1,"A","B","C")`		`Bewege von A nach C`
	`turm(0,"B","A","C")`	---

Unter Verwendung von Pseudocode und ohne Rücksicht auf die Aufrufe, die keine Ausgabe zur Folge haben, entsteht auch eine etwas kompaktere Darstellung:

Rekursionstiefe 0	Ausgabe
`turm(1,A,B,C)`	A → C

1 Ausgabe bedeutet 1 Bewegung, also hat das Programm für 1 Scheibe Laufzeit 1.

Spielen Sie den Aufruf `turm(2,"A","B","C")` von Hand durch und erstellen Sie eine analoge, veranschaulichende Grafik. Wie gross ist die Laufzeit für 2 Scheiben?
Hinweis: Beachten Sie die jeweiligen Rollenwechsel des Start-, Hilfe- und Ziel-Stabes.

Grafik:

Laufzeit für 2 Scheiben: ………

b. Spielen Sie den Aufruf `turm(4,"A","B","C")` von Hand durch und vervollständigen Sie, unter Berücksichtigung von Symmetrien, die folgende Tabelle.
   i. Wie gross ist die Laufzeit für 4 Scheiben?
   ii. Erklären Sie jemandem, wo man folgenden Zusammenhang erkennt:
$$B(4) = 2 \cdot B(3) + 1$$
   iii. Der Rekursionsbaum kann als vollständiger Binärbaum betrachtet werden. Erkennen Sie den Zusammenhang zwischen der Anzahl Scheiben und der Höhe des Baums bzw. zwischen der Laufzeit und der Anzahl Knoten?

Rekursionstiefe 0	Rekursionstiefe 1	Rekursionstiefe 2	Rekursionstiefe 3	Ausgabe
			turm(1,A,C,B)	A → B
		turm(2,A,B,C)		
	turm(3,A,C,B)			
turm(4,A,B,C)				A → C

Lösungsvorschlag:

a) Die Laufzeit für 2 Scheiben ist 3.

Rekursionstiefe 0	Rekursionstiefe 1	Ausgabe (Bewegung)
	`turm(1,"A","C","B")`	`Bewege von A nach B`
`turm(2,"A","B","C")`		`Bewege von A nach C`
	`turm(1,"B","A","C")`	`Bewege von B nach C`

b) Die Laufzeit für 4 Scheiben ist 15. Man sieht schön, wie sich bis zur letzten Rekursionstiefe jeder Knoten zweiteilt und selbst eine Ausgabe generiert.
Die Höhe h des Rekursionsbaums entspricht genau der Scheibenanzahl n. Ein vollständiger Binärbaum hat $2^h - 1$ bzw. $2^n - 1$ Knoten, was genau der Laufzeit entspricht.

Rekursionstiefe 0	Rekursionstiefe 1	Rekursionstiefe 2	Rekursionstiefe 3	Ausgabe
			`turm(1,A,C,B)`	A → B
		`turm(2,A,B,C)`		A → C
			`turm(1,B,A,C)`	B → C
	`turm(3,A,C,B)`			A → B
			`turm(1,C,B,A)`	C → A
		`turm(2,C,A,B)`		C → B
			`turm(1,A,C,B)`	A → C
`turm(4,A,B,C)`				A → C
			`turm(1,B,A,C)`	B → C
		`turm(2,B,C,A)`		B → A
			`turm(1,C,B,A)`	C → A
	`turm(3,B,A,C)`			B → C
			`turm(1,A,C,B)`	A → B
		`turm(2,A,B,C)`		A → C
			`turm(1,B,A,C)`	B → C

Arbeitsblätter «Lernende»

I. Spielen mit Steinen

Im Folgenden wird ein Spiel für zwei Personen vorgestellt, welches einfach erklärt ist und dazu mit wenigen Hilfsmitteln auskommt. Ein Spiel sowohl für Kinder als auch Erwachsene, das sich beispielsweise perfekt für kurze Zugfahrten zu zweit eignet. Dabei stellt sich die Frage, wie gross der Glücksanteil und wie gross der Kompetenzanteil ist.

Überwiegt die Komponente Glück, so wünschen wir Ihnen viel Erfolg im Spiel. Sollten Sie jedoch eine Gewinnstrategie entwickeln, so bitten wir, Ihren Gegenspielern zuliebe, um rücksichtsvolle Zurückhaltung. In jedem Fall wünschen wir Ihnen aber viel Spass beim Erarbeiten der folgenden Lerneinheit!

A. Nimm 1!

Spielregeln, Variante 1
Eine beliebige, aber feste Anzahl von Steinen liegen ausgebreitet. Zwei Spieler nehmen abwechselnd immer genau einen Stein weg. Der Spieler, der den letzten Stein wegnehmen muss, hat verloren.

Spielen Sie das Spiel gegen eine Mitschülerin oder einen Mitschüler. Statt Steine nehmen Sie besser ein paar Schreibstifte (Zahnstocher, Streichhölzer, etc.) zur Hand und legen Sie auf Ihren Schreibtisch. Sollten Sie für Ihren Geschmack zu wenige Gegenstände zum Spielen besitzen, können Sie auch Striche auf ein Papier zeichnen, die es stattdessen durchzustreichen gilt.

1. Bei welcher Anzahl von Steinen gewinnt der Startspieler? Bei welcher Anzahl von Steinen verliert er? Formulieren Sie Ihre Vermutung.
   → Induktionsannahme **(IA)**

2. Spielen Sie das Spiel mit 1 und mit 2 Steinen durch, um Ihre Vermutung zu überprüfen. Beschreiben Sie das Spielgeschehen, jeweils aus Sicht des Startspielers, genau in Worte.
   → Induktionsverankerung **(IV)**

Wie Sie wahrscheinlich bereits vermuteten, gewinnt der Startspieler bei einer geraden Anzahl von Steinen **(IA)**. Sie haben dies effektiv aber erst für 2 Steine nachgewiesen **(IV)**.

3. Angenommen Ihre Vermutung gilt für eine bestimmte gerade Anzahl von Steinen.
   Begründen Sie in Worte, warum Ihre Vermutung auch für die nächstgrössere gerade Zahl gilt.
   → Induktionsschritt **(IS)**
   Hinweis: Überlegen Sie sich, wie man gerade Zahlen als mathematischen Term darstellt und wie zwei aufeinanderfolgende gerade Zahlen miteinander zusammenhängen.

Wie Sie wahrscheinlich bereits vermuteten, verliert der Startspieler bei einer ungeraden Anzahl von Steinen **(IA)**. Sie haben dies effektiv aber erst für 1 Stein nachgewiesen **(IV)**.

4. Angenommen Ihre Vermutung gilt für eine bestimmte ungerade Anzahl von Steinen.
   Begründen Sie in Worte, warum Ihre Vermutung auch für die nächstgrössere ungerade Zahl gilt.
   → Induktionsschritt **(IS)**
   Hinweis: Überlegen Sie sich, wie man ungerade Zahlen als mathematischen Term darstellt und wie zwei aufeinanderfolgende ungerade Zahlen miteinander zusammenhängen.

5. **Zusatzaufgabe:** Wie kann man den Beweis des Induktionsschrittes in Aufgabe 4, mithilfe der bereits bewiesenen Induktionsannahme aus Aufgabe 3, abkürzen?

B. Nimm 1 oder 2!

<u>Spielregeln, Variante 2</u>
Nun haben die beiden Spieler jeweils die Wahl, entweder einen oder zwei Steine wegzunehmen. Weiterhin hat derjenige Spieler verloren, der den letzten Stein wegnehmen muss.

Spielen Sie das Spiel erneut gegen eine Mitschülerin oder einen Mitschüler und finden Sie auf spielerische Art heraus, inwiefern sich der Glücksanteil und der Kompetenzanteil, im Vergleich zur vorherigen Variante, verändert hat.

1. Tun Sie sich zu zweit zusammen und entscheiden Sie, wer Spieler A und wer Spieler B ist. Spielen Sie das Spiel über insgesamt 20 Spielrunden in der von der Tabelle vorgegebenen Reihenfolge und notieren Sie dabei jeweils, welcher Spieler das Spiel gewonnen hat. Beachten Sie, dass das Recht des ersten Startspielers mit jedem weiteren Stein wechselt.

Spielrunde	Steine	Startspieler	Sieger
1	1	A	
2		B	
3	2	B	
4		A	
5	3	A	
6		B	
7	4	B	
8		A	
9	5	A	
10		B	
11	6	B	
12		A	
13	7	A	
14		B	
15	8	B	
16		A	
17	9	A	
18		B	
19	10	B	
20		A	

Studieren Sie das obige Resultatblatt und vergleichen Sie bei Bedarf mit anderen Gruppen. Sie dürfen, auf der Suche nach einer besseren Gewinnquote, das Spiel beliebig oft auch gegen andere Mitschülerinnen und Mitschüler spielen.

2. Schreiben Sie aus Sicht des Startspielers die Gewinnstrategie in Worte auf, für den Fall, dass mit 1, 2, …, 10 Steinen gespielt wird. Wie oft sollte der Startspieler mindestens gewinnen?

3. Versuchen Sie ein Muster zu finden und überlegen Sie sich dann, wer mit 49, 50, 100 und 105 Steinen gewinnt, vorausgesetzt beide Spieler haben die Gewinnstrategie durchschaut.

4. Bei welcher Anzahl von Steinen gewinnt der Startspieler? Bei welcher Anzahl von Steinen verliert er? Formulieren Sie Ihre Vermutung.
   → Induktionsannahme **(IA)**

5. Beweisen Sie Ihre Vermutung mit vollständiger Induktion. Gehen Sie gleich vor wie in Teil A.
   Hinweis: Beginnen Sie mit den Fällen, in denen der Startspieler verliert.

6. **Zusatzaufgabe:** Formulieren Sie die Spielregeln so um, dass der Startspieler immer gewinnen kann, wenn die Anzahl von Steinen nicht $5m + 1$ ($m \in \mathbb{N}_0$) beträgt.
   Erklären Sie danach einer Mitschülerin oder einem Mitschüler mündlich, warum dies gilt.

Spielregeln, Variante 3

II. Türme versetzen

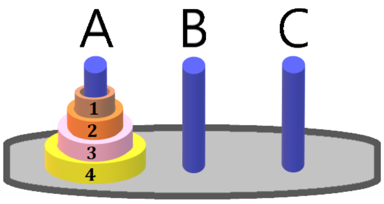
Sie erhalten mit diesem Skript auch ein Bastelbogen, um das Spiel «unplugged» spielen zu können. Die ersten beiden Seiten, mit den jeweils drei grossen schwarzen Scheiben darauf, sind Spielfelder. Schneiden Sie nun mit einer Schere die Scheiben, die von 1 bis 5 durchnummeriert sind, aus und breiten Sie anschliessend alle Spielutensilien vor sich aus.

Sobald die Bastelarbeit getan ist, lesen Sie bitte die Spielregeln sorgfältig durch und lösen dann die anschliessenden Aufgaben.

Spielregeln

*Das Spiel besteht aus drei gleich grossen Stäben **A**, **B** und **C**, auf die mehrere gelochte Scheiben gelegt werden, alle verschieden gross. Zu Beginn liegen alle Scheiben auf Stab **A**, der Grösse nach geordnet, mit der grössten Scheibe unten und der kleinsten oben. Ziel des Spiels ist es, den kompletten Scheiben-Stapel von **A** nach **C** zu versetzen.*

In folgender Grafik ist beispielhaft die Anfangssituation mit 4 Scheiben dargestellt:



Bei jedem Zug darf die oberste Scheibe eines beliebigen Stabes unter der Voraussetzung, dass sich dort nicht schon eine kleinere Scheibe befindet, auf einen der beiden anderen Stäbe gelegt werden. Folglich sind zu jedem Zeitpunkt des Spieles die Scheiben auf jedem Feld der Grösse nach geordnet.

1. Spielen Sie das Spiel für sich, mit **1**, **2**, **3** und **4 Scheiben**, auf dem **Spielfeld 1** durch.
   a. Schreiben Sie jeweils in die Tabelle, wie viele Bewegungen Sie dafür benötigt haben.

# Scheiben	# Bewegungen
1	
2	
3	
4	

   b. Vergleichen Sie danach mit anderen. Hat jemand weniger Bewegungen benötigt? Notieren Sie sich allenfalls die neue, kleinere Zahl und spielen Sie das Spiel nochmals.

Bevor Sie zu den nächsten Aufgaben schreiten, stellen Sie sicher, dass Sie durch Vergleich mit Ihren Mitschülerinnen und Mitschülern, tatsächlich die minimale Anzahl von Bewegungen in den ersten vier Fällen gefunden haben.

2. Spielen Sie das Spiel für sich, mit **3 Scheiben**, auf dem **Spielfeld 2** durch.
   a. Wählen Sie zuerst aus den drei Symbolen einen Start-Stab und einen Ziel-Stab aus:

      Start-Stab:  Ziel-Stab: 

   b. Fassen Sie in Worte, welche Rolle dem dritten Stab zukommt und inwiefern sich das Spiel auf **Spielfeld 2** im Vergleich zum vorherigen Spiel auf **Spielfeld 1** verändert hat. Vergleichen Sie mit jemandem, der sich für andere Symbole entschieden hat.

Die folgenden Aufgaben werden weiterhin auf **Spielfeld 2** gespielt. Sie benötigen das **Spielfeld 1** erst wieder am Schluss, in Kombination mit dem vorgestellten Algorithmus, programmiert in Python.

3. Legen Sie **4 Scheiben**, der Grösse nach geordnet, auf einen Start-Stab Ihrer Wahl. Angenommen Sie wollen erstmal nicht das Spiel meistern, sondern lediglich der untersten Scheibe einen neuen Anstrich verpassen. Dies weiterhin unter Einhaltung der Spielregeln.
   a. Wie viele Bewegungen benötigen Sie mindestens, um die obersten drei Scheiben auf einen neuen Stab zu versetzen und somit die vierte Scheibe freizulegen?
   b. Nachdem Sie diese Scheibe neu bemalt haben, wie viele Bewegungen benötigen Sie, um wieder in die ursprüngliche Ausgangslage zu gelangen?
   c. Wählen Sie einen Ziel-Stab und spielen Sie das Spiel für sich mit 4 Scheiben durch. Fassen Sie in Worte, welche Parallelen Sie zu den Teilaufgaben a) und b) feststellen und wie man also das Problem mit 4 Scheiben auf jenes mit 3 Scheiben zurückführt.

Sie haben das Spiel nun mehrfach mit 1 bis 4 Scheiben gespielt. In Aufgabe 1 haben Sie die dafür benötigte Mindestanzahl von Bewegungen notiert und in Aufgabe 2 vermutlich bereits festgestellt, dass die Rollen der Stäbe beliebig vertauscht werden können, ohne den Spielmechanismus grundsätzlich zu verändern. In Aufgabe 3 haben Sie das Problem mit 4 Scheiben auf das Problem mit 3 Scheiben zurückgeführt und somit den Grundstein für den Induktionsschritt gelegt. Wir wollen auf dieser Basis einige Beziehungen mathematisch beschreiben und beweisen.

4. Mathematisch kann man die Mindestanzahl von Bewegungen als Funktion B in Abhängigkeit der Anzahl Scheiben betrachten. Sei also n die Anzahl Scheiben und $B(n)$ die Mindestanzahl von Bewegungen in Abhängigkeit von n.
   a. Vervollständigen Sie, in Anlehnung an Aufgabe 1, die nachfolgende Tabelle:

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{B(n)}$
1	
2	
3	
4	

   b. Finden Sie, in Anlehnung an Aufgabe 3, eine rekursive Bildungsvorschrift, wie man $B(4)$ in Abhängigkeit von $B(3)$ bestimmen kann.

   $B(4) =$ ………………………………………………

   c. Finden Sie nun eine rekursive Bildungsvorschrift, wie man $B(n+1)$ allgemein, d.h. mit $n \in \mathbb{N}$, in Abhängigkeit von $B(n)$ bestimmen kann, wobei $B(1) = 1$ gilt.

   $B(n+1) =$ ……………………………………………… $(n \in \mathbb{N})$

   d. Überprüfen Sie mithilfe der Tabelle aus Teilaufgabe a), ob die Bildungsvorschrift für $n \in \{2; 3; 4\}$ gilt und versuchen Sie, von $B(1) = 1$ ausgehend, zu begründen, warum die jeweiligen Lösungen optimal sind, d.h. die Anzahl von Bewegungen minimal ist.

   e. Berechnen Sie $B(5) =$ ………… und spielen Sie das Spiel für sich mit **5 Scheiben** durch.

Sie haben nun erstmals das Spiel von Hand mit 5 Scheiben gespielt und dabei sicher festgestellt, dass der Aufwand mit jeder zusätzlichen Scheibe rasant ansteigt. Aus diesem Grund soll es jetzt auch rein theoretisch weitergehen.

5. Sie haben in Aufgabe 4 eine rekursive Bildungsvorschrift für die minimale Anzahl von Bewegungen in Abhängigkeit der Anzahl von Scheiben gefunden. Gesucht ist nun eine explizite Bildungsvorschrift.
   a. Berechnen Sie als Aufwärmübung die folgenden Zweierpotenzen:

$2^0 =$	
$2 \cdot 2^0 = 2^1 =$	
$2 \cdot 2^1 = 2^2 =$	
$2 \cdot 2^2 = 2^3 =$	
$2 \cdot 2^3 = 2^4 =$	
$2 \cdot 2^4 = 2^5 =$	

b. Vervollständigen Sie, in Anlehnung an Aufgabe 4, die nachfolgende Grafik:

$B(1) =$	$+1$	$= 2^0$	$= 1$
$B(2) =$	$+1 \quad +2$	$= 2^0 + 2^1$	$= 3$
$B(3) =$	$+1 \quad +2 \quad +4$	$=$	$=$
$B(4) =$		$=$	$=$
$B(5) =$		$=$	$=$

c. Beschreiben Sie $B(n)$ mithilfe des Summenzeichens als Summe von Zweierpotenzen:

$$B(n) =$$

d. Vergleichen Sie die Zweierpotenzen aus Teilaufgabe a) mit den resultierenden Zahlenwerten von $B(n)$ aus Teilaufgabe b) für $n \in \{1,2,3,4,5\}$.
Finden Sie eine explizite Bildungsvorschrift für $B(n)\ \forall n \in \mathbb{N}$:

$$B(n) =$$

e. Stellen Sie durch Vergleich mit Ihren Mitschülerinnen und Mitschülern sicher, dass Teilaufgabe c) und d) korrekt sind und beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass die beiden Ausdrücke $\forall n \in \mathbb{N}$ gleich sind.
Hinweis: Sie können im Induktionsschritt entweder die Summe, wie sonst üblich, manipulieren und den letzten Summanden aus der Summe rausziehen, oder die bereits begründete rekursive Bildungsvorschrift aus Teilaufgabe 4c) verwenden.

(IA)

(IV)

(IS)

Sie haben mithilfe der Bastelbögen auf spielerische Art von Hand herausgefunden, was die minimale Anzahl von Bewegungen für n Türme ist, wobei das n überschaubar gross war. Ihr mathematisches Geschick hat Sie schliesslich auch eine rekursive und eine explizite Bildungsvorschrift für die minimale Anzahl von Bewegungen $\forall n \in \mathbb{N}$ aufstellen lassen. Letzteres Wissen wird Ihnen sowohl helfen den folgenden Algorithmus besser und schneller zu verstehen als auch diesen auf Komplexität bzw. auf Laufzeit zu untersuchen. Der Algorithmus ist in der Programmiersprache Python geschrieben und löst die Aufgabe optimal.

6. Speichern Sie die Datei ***turm.py*** auf Ihrem Gerät. Der Code sieht so aus:

```
def turm(scheiben, start, hilfe, ziel):
      if scheiben > 0:
            turm(scheiben - 1, start, ziel, hilfe)
            print("Bewege Scheibe", scheiben, "von", start, "nach", ziel)
            turm(scheiben - 1, hilfe, start, ziel)
```

   a. Studieren Sie den Code und halten Sie die Funktionsweise kurz schriftlich fest. Tun Sie sich anschliessend mit jemandem zusammen und erklären Sie es sich gegenseitig. **Hinweis:** Vergleichen Sie die letzten 3 Zeilen mit den Erkenntnissen aus Aufgabe 3c).

   b. Lassen Sie das Programm mit dem Aufruf `turm(3,"A","B","C")` – optional auch mit `turm(4,"A","B","C")` – laufen und spielen Sie es auf dem **Spielfeld 1** unplugged nach, während der Computer Ihnen die jeweils nächste Bewegung verrät.

7. Untersuchen Sie nun die Laufzeit des Programms von Hand in Abhängigkeit der Anzahl von Scheiben. Nehmen Sie dafür an, dass jeder Aufruf von `turm(…,…,…,…)` gratis ist. Zählen Sie nur die Bildschirmausgaben mit, die schlussendlich einer Bewegung entsprechen.

   a. Der Aufruf `turm(1,"A","B","C")` lässt sich folgendermassen veranschaulichen:

Rekursionstiefe 0	**Rekursionstiefe 1**	**Ausgabe (Bewegung)**
	`turm(0,"A","C","B")`	---
`turm(1,"A","B","C")`		`Bewege von A nach C`
	`turm(0,"B","A","C")`	---

Unter Verwendung von Pseudocode und ohne Rücksicht auf die Aufrufe, die keine Ausgabe zur Folge haben, entsteht auch eine etwas kompaktere Darstellung:

Rekursionstiefe 0	**Ausgabe**
`turm(1,A,B,C)`	A → C

1 Ausgabe bedeutet 1 Bewegung, also hat das Programm für 1 Scheibe Laufzeit 1.

Spielen Sie den Aufruf `turm(2,"A","B","C")` von Hand durch und erstellen Sie eine analoge, veranschaulichende Grafik. Wie gross ist die Laufzeit für 2 Scheiben? **Hinweis:** Beachten Sie die jeweiligen Rollenwechsel des Start-, Hilfe- und Ziel-Stabes.

Grafik:
Laufzeit: ....

b. Spielen Sie den Aufruf `turm(4,"A","B","C")` von Hand durch und vervollständigen Sie, unter Berücksichtigung von Symmetrien, die folgende Tabelle.

Rekursionstiefe 0	Rekursionstiefe 1	Rekursionstiefe 2	Rekursionstiefe 3	Ausgabe
			`turm(1,A,C,B)`	A → B
		`turm(2,A,B,C)`		
	`turm(3,A,C,B)`			
`turm(4,A,B,C)`				A → C

i. Wie gross ist die Laufzeit für 4 Scheiben? ....

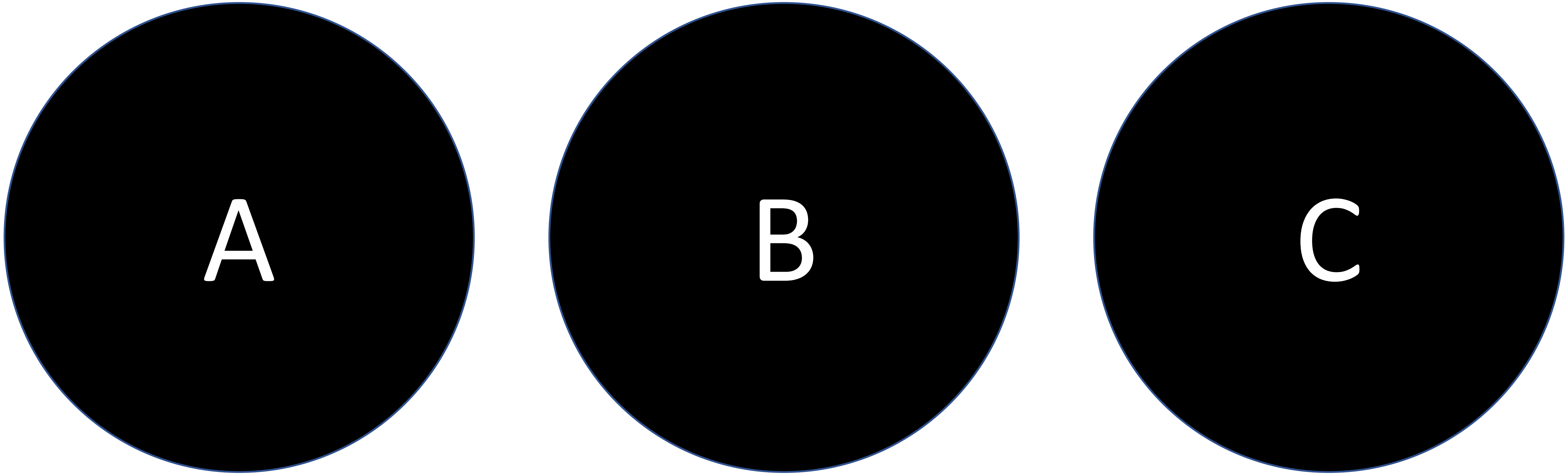
ii. Erklären Sie jemandem, wo man folgenden Zusammenhang erkennt:

$$B(4) = 2 \cdot B(3) + 1$$

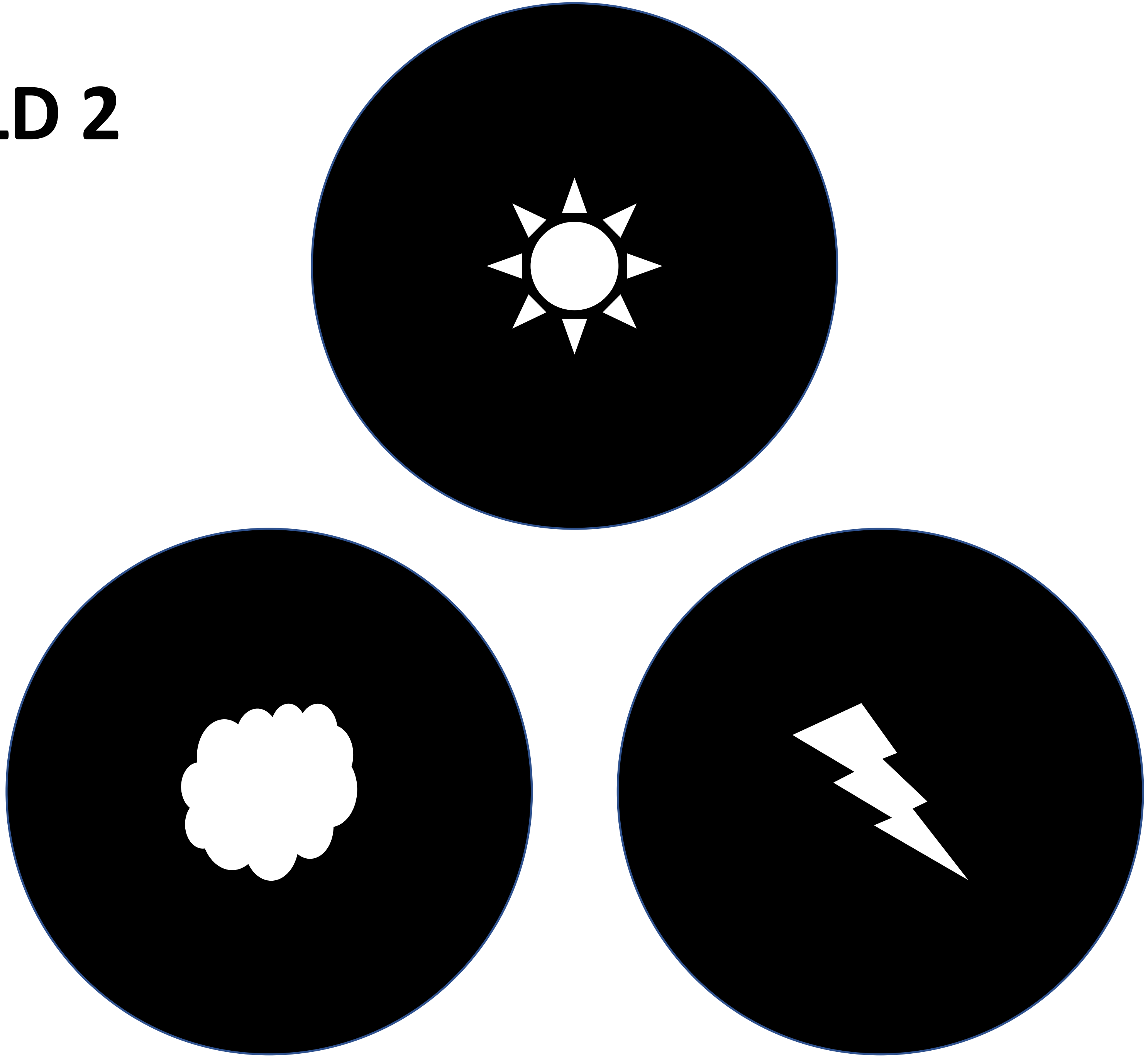
iii. Der Rekursionsbaum kann als vollständiger Binärbaum betrachtet werden. Erkennen Sie den Zusammenhang zwischen der Anzahl Scheiben und der Höhe des Baums bzw. zwischen der Laufzeit und der Anzahl Knoten?

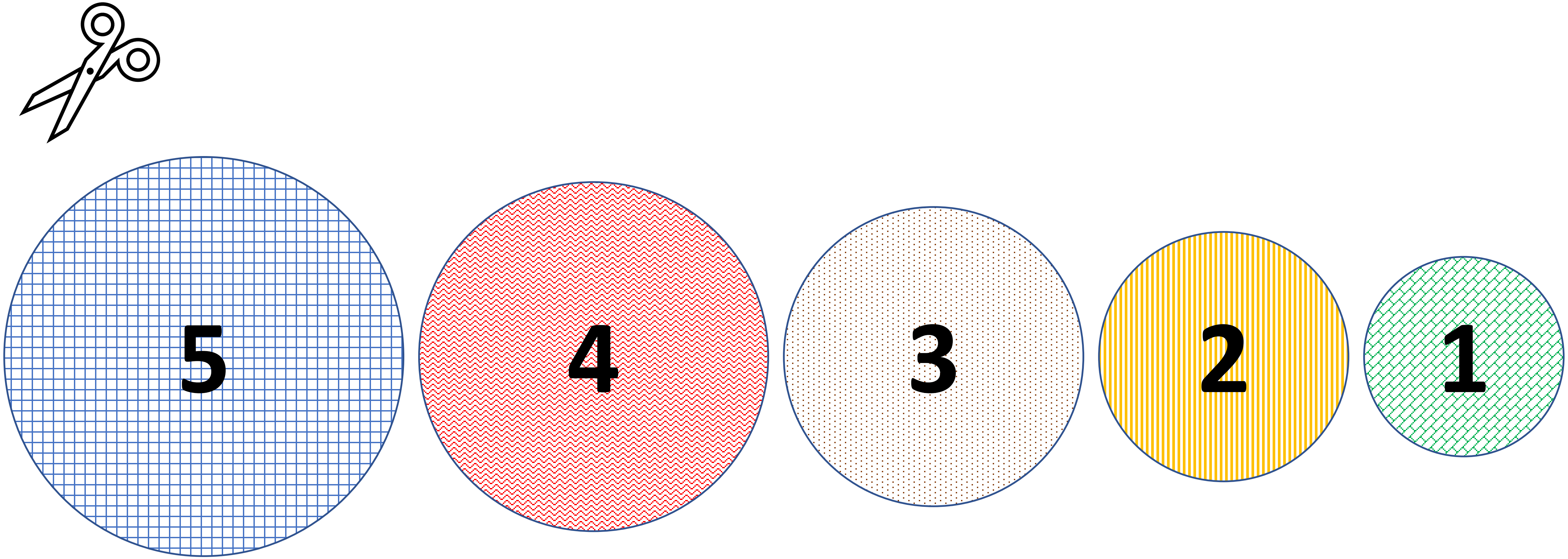
Bastelbogen

SPIELFELD 1



SPIELFELD 2




5
4
3
2
1