Einführung in die Methode der Induktion als Grundlage für die Entwicklung von Algorithmen

Oliver De Capitani

Gymnasium Muttenz

Version vom 23.11.2022

1 Pädagogische Grundlagen

Die vollständige Induktion ist eine sehr effektive Technik in der Mathematik, um Beweise für unendliche Prozesse zu liefern. Die aufbauende Natur der Induktion kann in der Algorithmik wieder verwendet werden, um neue Algorithmen oder Ideen für Algorithmen zu generieren.

1.1 Ziele

Die Schüler*innen sollen am Ende dieser Einheit einen kleinen Einblick in die Technik der vollständigen Induktion erhalten haben und erkennen, wie Algorithmen ebenfalls auf bestehende Ergebnisse zurückgreifen, um effizient nach Lösungen zu suchen.

Die exakte Technik der vollständigen Induktion ist explizit kein Ziel dieser Einheit. Es reicht, wenn die Schüler*innen ein intuitives Verständnis dafür entwickeln.

1.2 Vorwissen

Das Zielpublikum dieser Unterrichtseinheit kennt die vollständige Induktion nicht und befindet sich am Anfang ihrer gymnasialen Karriere (10. Klasse). Die Schüler*innen werden auch im Bereich der Algorithmen noch nicht viele komplexe Beispiele kennen. Es geht also hier explizit um *Basics* in diesen beiden Bereichen.

Die Schüler*innen werden in dieser Einheit auch die Theorie der *Graphen* kennenlernen. Diese ist zwar ein bisschen abstrakt, aber die Beispiele sind dafür sehr anschaulich und intuitiv. Wir führen auch die abstrakten Definitionen von Graphen ein.

1.3 Zeitlicher Rahmen

Diese Unterrichtseinheit braucht mindestens zwei Doppellektionen – also vier Lektionen. Die geplante Unterrichtszeit sollte den Schüler*innen ausreichend Raum bieten für eigene Erfahrungen und Entdeckungen.

1.4 Ablauf der Unterrichtseinheit

Die Schüler*innen sollten diese Einheit zu grossen Teilen selbstständig durcharbeiten können. An einzelnen Stellen kann es notwendig sein, dass die Lehrperson eingreift und lenkend unterstützt.

Es wird zuerst anhand von geometrischen Beispielen die intuitive Idee der Induktion eingeführt. Es geht darum zu erkennen, wie man bereits bekannte Ergebnisse in eine weitere Berechnung einbauen kann.

Im nächsten Teil werden die Graphen als abstraktes *Objekt* definiert. Dieser Teil könnte für einzelne Schüler*innen als sehr abstrakt empfunden werden.

Zum Schluss wird anhand des Beispiels "Six Degrees of Kevin Bacon" der *Breadth-First Search* Algorithmus entwickelt. Die Idee ist, dass die Schüler*innen erkennen, dass man beim Durchlaufen des Graphen alle Punkte, die man bereits erreicht hat, nicht mehr absuchen muss.

2 Unterlagen für Schüler*innen

Die folgende Niederschrift präsentiert die Vorbedingungen, Inhalte und Erläuterungen sowie Aufgaben und deren Lösungen für die Schüler*innen.

Induktion in der Mathematik

Ein nicht ganz ernster Einstieg

Das Induktionsprinzip für Taschentücher besagt: In einen Koffer passen unendlich viele Taschentücher...

$\rightarrow$ Eines mehr passt immer noch rein.

Selbstverständlich kann dieses Prinzip auf viele weitere Gebiete ausgeweitet werden: Ich kann unendlich viele Gummibärchen essen, es gibt unendlich viele Krümel unter dem Sofakissen, usw.

> **Idee der Induktion** Bei der *Induktion* werden vorhergehende Resultate verwendet, um weitere Ergebnisse zu finden. Die vollständige Induktion wird auch manchmal als *Dominoprinzip* umschrieben.

Was ist ein Beweis?

In der Mathematik werden immer wieder Aussagen von allgemeiner Natur gemacht: Es gibt unendlich viele Primzahlen, die Winkelsumme in einem Dreieck beträgt $180°$, die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ergibt n^2, usw.

Mathematiker begnügen sich aber nicht einfach damit, diese Aussagen zur Kenntnis zu nehmen; vielmehr wollen sie diese Aussagen auf logische Art und Weise *beweisen*. Ein *Beweis* ist eine Folge von logischen Folgerungen, nach denen man zu dem Schluss kommen muss, dass eine gewählte Aussage stimmt. Im Repertoire eines/r Mathematikers/in findet man viele verschiedene Techniken, um Aussagen zu beweisen. Den Schüler*innen ist sicher der “Beweis durch Autorität“ am geläufigsten: *Die Lehrperson sagt es, also muss es so sein.*

Da wir Sie, liebe Schüler*innen, aber zu rational und kritisch denkenden Menschen erziehen möchten, zeigen wir Ihnen hier eine Methode, mit der Sie gewisse Aussagen selbst nachvollziehen und beweisen können – die “Induktion“.

Beweise in der Unendlichkeit

Gewisse Aussagen lassen sich sehr einfach beweisen:

- 50 ist eine gerade Zahl.

  Beweis. $50 = 2 \cdot 25$.

- Die Summe zweier gerader Zahlen ist immer gerade.

  Beweis. Nennen wir die Zahlen $x = 2m$ und $y = 2n$, dann ist

  $$x + y = 2m + 2n = 2 \cdot (m + n).$$

  Das Resultat ist also gerade.

Wie ist es aber, wenn wir eine Aussage beweisen wollen, die eine unendliche Anzahl solcher Argumente brauchen würde? Wir betrachten folgendes Beispiel: Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ergibt n^2.

Diese Aussage gilt ja für alle $n \in \mathbb{N}$; wir müssten also unendlich viele Fälle überprüfen, was nicht wirklich praktikabel ist[1].

Wir benutzen dabei einen logischen “Trick“.

> **Wir zeigen:** Falls diese Aussage für n richtig ist, dann muss sie auch für $n + 1$ richtig sein.
> Daher kommt auch der Name des Dominoprinzips: Jede Zahl, für die die Aussage richtig ist, ergibt die Folgerung, dass sie auch für die nächste Zahl richtig sein muss.

Dieser Schritt von n auf $n + 1$ heisst *Induktionsschritt*. Somit können wir Beweise für unendlich viele Schritte führen:

- Falls die Aussage für $n = 1$ stimmt, dann stimmt sie auch für $n = 2$.
- Falls die Aussage für $n = 2$ stimmt, dann stimmt sie auch für $n = 3$.

[1] Eine Mathelektion dauert nicht unendlich lange – das kommt Ihnen nur so vor.

- Falls die Aussage für $n = 3$ stimmt, dann stimmt sie auch für $n = 4$.
- Falls die Aussage für $n = 4$ stimmt, dann stimmt sie auch für $n = 5$.

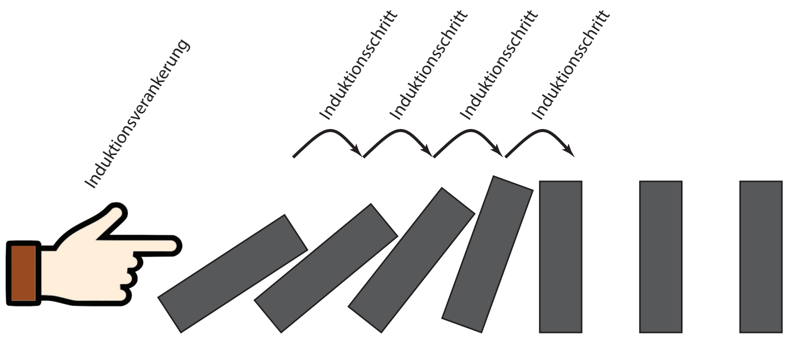
  $\vdots$

Ein kleines Problem kann man in der allerersten Zeile finden: “Falls die Aussage für $n = 1$ stimmt,...“. Damit wir also “starten“ können, müssen wir diesen einen Fall $n = 1$ konkret zeigen.

Die vollständige Induktion

Die vollständige Induktion besteht also aus zwei logischen Schritten:

- Zeigen Sie, dass eine Aussage für ein konkretes n richtig ist (*Induktionsverankerung*).
- Zeigen Sie: Falls die Aussage für n richtig ist, dann ist sie auch für $n + 1$ richtig (*Induktionsschritt*).



Ein konkretes Beispiel

Wir betrachten die Aussage: Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ergibt n^2.

Beweis. Schritt 1 – Die Verankerung $n = 1$: Die erste ungerade Zahl ist 1:

$$1 = 1^2 .$$

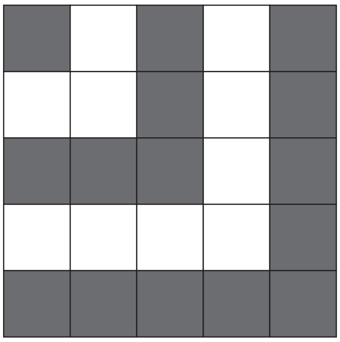
Schritt 2 – Der Induktionsschritt: Wir dürfen nun annehmen, dass die Summe der ersten n ungeraden Zahlen gerade n^2 ergibt. Was geschieht, wenn wir die nächste ungerade Zahl dazu nehmen?

Die n-te ungerade Zahl ist gegeben durch $2n-1$; also ist die $(n+1)$-te ungerade Zahl $2 \cdot (n+1) - 1 = 2n+1$. Wir finden also:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Wir sind also fertig: Falls die Summe der ersten n ungeraden Zahlen n^2 ergibt, dann ergibt die Summe der ersten $n+1$ ungeraden Zahlen gerade $(n+1)^2$. Da wir gezeigt haben, dass die Aussage für $n = 1$ stimmt, können wir also folgern, dass die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ stimmt.

Bemerkung: Es gibt noch eine graphische Möglichkeit diese Tatsache einzusehen:



Wir sehen hier, dass immer, wenn wir die nächste ungerade Zahl von kleinen Quadraten geschickt anhängen, wiederum ein grösseres Quadrat entsteht.

Induktion in der Informatik

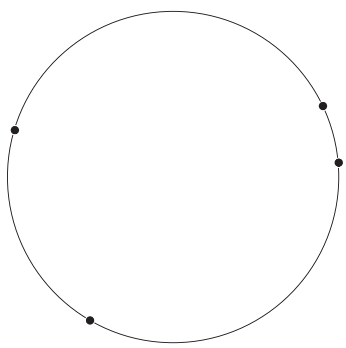
In der Informatik können wir diese Idee der Induktion ebenfalls anwenden. Viele algorithmische Probleme lassen sich lösen oder mindestens vereinfachen, wenn man dasselbe Problem für weniger Punkte, Zahlen, usw. bereits gelöst hat.

Im Folgenden werden wir ein paar Beispiele betrachten, bei denen wir auf “einfachere“ Lösungen zurückgreifen, um komplexere Fälle zu lösen.

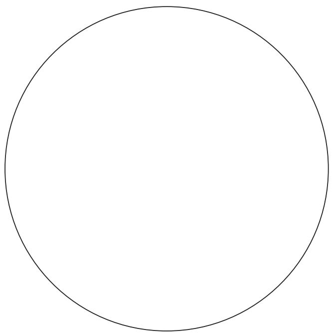
Der Sinngehalt von n kann von Fall zu Fall unterschiedlich sein. Manchmal bezeichnet n eine abstrakte Zahl, manchmal eine konkrete Anzahl von Objekten.

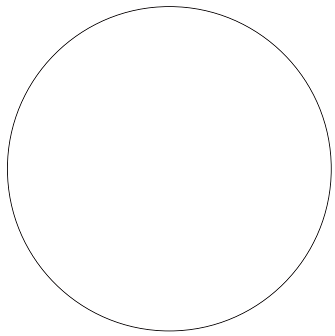
Ein erstes Beispiel

Aufgabe 1. Auf einem Kreis sind vier Punkte eingezeichnet. Verbinden Sie jeweils zwei Punkte mit einer Geraden. Wie viele verschiedene Geraden können so entstehen?



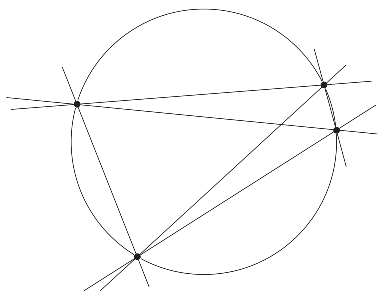
Aufgabe 2. Gibt es bei einer anderen Anordnung der Punkte eine andere Lösung? Zeichnen Sie in den unteren beiden Kreisen jeweils vier Punkte an beliebigen Stellen ein und zeichnen Sie die Verbindungsgeraden. Was stellen Sie fest?





Wir halten fest: Die Anzahl der Geraden hängt nur von der Anzahl der gezeichneten Punkte ab.

Aufgabe 3. Wir betrachten nun die Lösung der Aufgabe 1. Zeichnen Sie einen zusätzlichen Punkt auf den Kreis und zeichnen Sie die neuen Verbindungsgeraden ein. Wie viele Geraden haben Sie eingezeichnet? Wie viele Geraden sind es nun insgesamt?



Aufgabe 4. Wie sieht es nun aus, wenn wir schon 10 Punkte und die zugehörigen Geraden haben und einen 11. Punkt hinzufügen? Wie viele zusätzliche Geraden müssen wir zeichnen? Wie viele Geraden sind es zum Schluss?

Aufgabe 5. Wir starten nun mit einer beliebigen Anzahl Punkte auf einem Kreis – also mit n Punkten. Wie viele neue Geraden entstehen, wenn wir nun einen zusätzlichen Punkt einfügen? Können Sie eine Formel angeben, die die Gesamtzahl der Geraden berechnet?

Folgerungen

Wenn wir das Ganze als Prozess betrachten, dann können wir die allgemeine Formel für die Anzahl Verbindungsgeraden bestimmen.

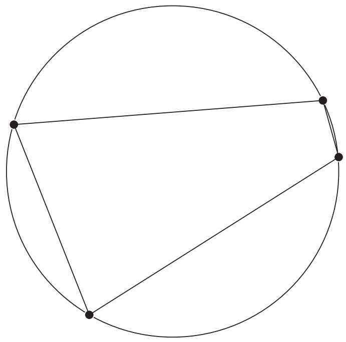
Der Prozess läuft folgendermassen: Wir beginnen mit zwei Punkten auf einem Kreis (nur Politiker können durch einen einzigen Punkt eine Gerade legen). Dann gibt es genau eine Verbindungsgerade. Jeder zusätzliche Punkt wird mit allen bestehenden Punkten verbunden und wir können Folgendes beobachten:

Anzahl Punkte	Anzahl Verbindungsgeraden
2	1
3	$1+2=3$
4	$1+2+3=6$
5	$1+2+3+4+5=11$
$\vdots$	$\vdots$
n	$1+2+3+\cdots+(n-1)$

Diese Idee des Zurückgreifens auf bestehende Resultate bildet die Grundlage der *Induktion*. In der Mathematik wird die Induktion verwendet, um unendliche Prozesse zu beschreiben. In der Informatik werden wir diese Idee nutzen, um *Algorithmen* zu entwickeln.

Ein zweites Beispiel

Aufgabe 6. Wir betrachten wieder Punkte auf einem Kreis. Diesmal betrachten wir aber die Punkte als Eckpunkte eines *Polygons* (eines Vielecks).



Wie viele Diagonalen hat das oben dargestellte Polygon? Hinweis: Eine Diagonale verläuft durch das Innere eines Polygons.

Aufgabe 7. Zeichnen Sie in die Kreise einmal fünf und einmal sechs Punkte ein und bestimmen Sie die Anzahl der Diagonalen in den entstehenden Polygonen.

Aufgabe 8. Überlegen Sie, wie im vorherigen Beispiel, wie man diesen Prozess verallgemeinern könnte. Was geschieht mit der Anzahl der Diagonalen, wenn ein neuer Punkt hinzukommt? Sie finden unten ein paar Kreise, in denen Sie Notizen machen und ausprobieren können, sowie eine Tabelle, die Sie mit Ihren Ergebnissen ergänzen können.

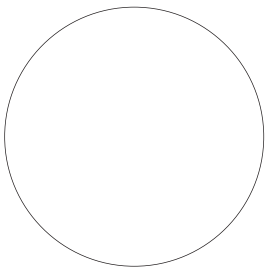
Anzahl Punkte	Anzahl Diagonalen
4	2
5	5
6	9
7	
8	
9	
$\vdots$	$\vdots$
n	

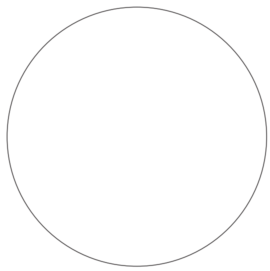
Ein drittes Beispiel

Aufgabe 9. Führen Sie dieselben Gedanken wie bei den vorherigen beiden Beispielen durch, um folgende Frage zu beantworten:

Gegeben sind n Punkte auf einem Kreis. Wie gross ist die Winkelsumme im n-Eck, das von diesen Punkten gebildet wird?

Beginnen Sie wieder mit einer kleinen Anzahl Punkte und bestimmen Sie für diese die Resultate. Versuchen Sie dann diese Resultate zu verwenden, wenn Sie einen Punkt hinzufügen. Falls Sie Mühe haben diesen Schritt zu vollziehen, finden Sie in der Fussnote einen Hinweis[2].





Anzahl Punkte	Winkelsumme
3	$180°$
4	
5	
6	
7	
$\vdots$	$\vdots$
n	

[2] Hinweis: Betrachten Sie das Dreieck, das mit dem neuen Punkt und dem bestehenden n-Eck gebildet wird.

Ein kurzer Exkurs in die Graphentheorie

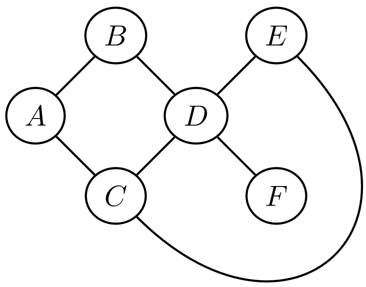
Wir haben in den letzten Aufgaben viele Punkte und Linien betrachtet. In der Mathematik oder Informatik bezeichnet man solche Darstellungen als *Graphen*. Wir möchten nun diese Arbeit benutzen, um einen ersten graphentheoretischen Algorithmus zu entwickeln. Dazu müssen wir aber zuerst ein paar Begriffe und Darstellungen einführen.

Es gibt unzählige Anwendungen der Graphentheorie in der Informatik. Ein Beispiel, das Sie wohl alle (mindestens in der Anwendung) kennen, ist das Bestimmen von kürzesten Wegen in einem Netzwerk. Jedes Mal, wenn Sie eine Routenplanung von einem GPS-Gerät oder einer App bestimmen lassen, ist das ein Optimierungsproblem in einem (Strassen-)Netzwerk.

Wir werden im Weiteren eine andere Anwendung in einem "Netzwerk" betrachten (mehr dazu folgt später).

Was ist ein Graph?

Ein Graph besteht aus *Knoten* und *Kanten* und erlaubt es uns, sehr anschaulich Beziehungen zwischen Objekten darzustellen:



Die Knoten wurden in dieser Darstellung als kleine Kreise gezeichnet. Eine Kante ist eine Verbindung zwischen zwei Knoten und stellt eine gewisse Beziehung zwischen den beiden Knoten her. Diejenigen Knotenpaare , die diese Beziehung haben, sind mit einer Kante verbunden. Diejenigen Kontenpaare ohne diese Beziehung sind nicht mit einer Kante verbunden.

Graphen werden oft als zwei Mengen V (englisch “vertex“ = Knoten) und E (englisch “edge“ = Kante) repräsentiert, wobei die Menge der Kanten E als Paare von verbundenen Knoten beschrieben wird. Im obigen Beispiel hätten wir also:

$$V = \{A, B, C, D, E, F\}$$

und

$$E = \{A\text{-}B, A\text{-}C, B\text{-}D, C\text{-}D, D\text{-}E, D\text{-}F, E\text{-}C\}$$

Hinweis: Wenn wir Kanten und Knoten in alphabetischer Reihenfolge aufschreiben, verringern wir die Wahrscheinlichkeit etwas zu vergessen[3].

Es folgen einige Begriffe und Notationen:

- $|V|$ bezeichnet die *Anzahl Kanten*.
- $|E|$ bezeichnet die *Anzahl Knoten*.
- Der *Grad eines Knotens* ist die Anzahl der Kanten, die mit diesem Knoten verbunden sind.

Im oberen Beispiel wäre also $|V| = 6$, $|E| = 7$ und der Grad des Knotens D wäre 4.

Ein (weiteres) erstes Beispiel

Wir betrachten das Spiel *”Six Degrees of Kevin Bacon”*.

”Six Degrees of Kevin Bacon” ist ein Spiel, das 1994 von drei gelangweilten Studenten entwickelt wurde. Es geht darum, eine*n beliebige*n Schauspieler*in in weniger als

[3]**Bemerkung:** Die obige Notation für Kanten entspricht nicht ganz dem Standard. In den meisten Textbüchern werden Sie die Darstellung

$$E = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}, \{D, E\}, \{D, F\}, \{E, C\}\}$$

finden. Für die Anwendung hier empfinde ich die erste Schreibweise intuitiver.

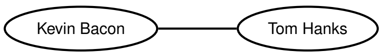
sechs Schritten mit Kevin Bacon zu *verbinden*. Zwei Schauspieler*innen gelten als *verbunden*, wenn sie im selben Film zu sehen sind (sie müssen nicht unbedingt zusammen auf der Leinwand auftreten).

Die Anzahl Schritte zwischen Kevin Bacon und dem/der Schauspieler*in heisst *Bacon-Zahl*. Die "Six Degrees" beziehen sich auf ihre Beobachtung, dass es immer(?) in höchstens sechs Schritten möglich war.

Wir können dies nun als Graph darstellen, bei dem Kevin Bacon als Ausgangsknoten dient.

Ein erster Graph

Kevin Bacon spielt in *Apollo 13 [1995]* zusammen mit Tom Hanks. Folglich können wir in unserem Graphen folgendermassen starten:

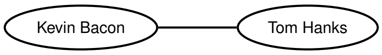


Tom Hanks hat somit eine Bacon-Zahl von 1.

Eine erste Aufgabe dazu

Aufgabe 10. Gehen Sie zur Webseite `https://oracleofbacon.org/` (letzter Besuch: 13.3.2022) und suchen Sie eine (es gibt mehrere) Verbindung zwischen *Nicole Kidman* und Kevin Bacon heraus.

Stellen Sie die gefundene Information als Graph dar. Ergänzen Sie allfällige Zwischenknoten. Sie können den obigen Graph ergänzen.



Eine zweite Aufgabe

Aufgabe 11. Gehen Sie Wieder zur Seite `https://oracleofbacon.org/`. Suchen Sie nach drei Ihrer Lieblingsschauspieler*innen. Ergänzen Sie den Graph, den wir bisher konstruiert haben. Was ist die grösste Bacon-Zahl, die Sie gefunden haben?

Aufgabe 12. Wer hat die Bacon-Zahl ”Null”? Welche Bacon-Zahl sollte man einer Person geben, die nicht auf diese Weise mit Kevin Bacon verbunden werden kann?

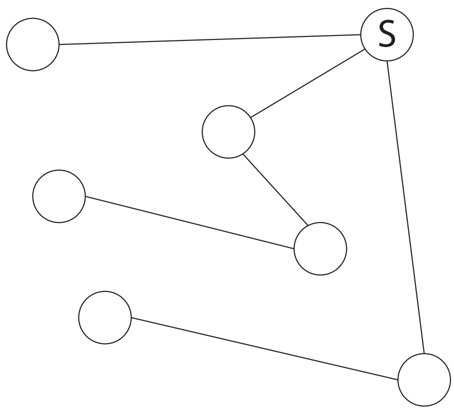
Der Algorithmus

Wir suchen nun einen *Algorithmus*, der uns für eine beliebige Person in einem solchen Netzwerk die "Bacon-Zahl" liefert. Wir werden versuchen, unsere Erkenntnisse aus dem ersten Teil (Induktion) einzubringen.

> **Definition.** Ein Algorithmus ist eine eindeutige Handlungsvorschrift zur Lösung eines Problems oder einer Klasse von Problemen. Algorithmen bestehen aus endlich vielen, wohldefinierten Einzelschritten.

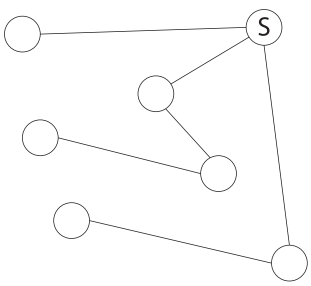
Ein paar Aufgaben dazu

Aufgabe 13. Bestimmen Sie die Distanzen der übrigen Knoten vom Startpunkt S im gegebenen Graphen. Sie können die Distanzen direkt in die Kreise schreiben. *Distanz* bedeutet in diesem Zusammenhang die *Anzahl Kanten, die man durchlaufen muss, um von S zu diesem Knoten zu gelangen.*

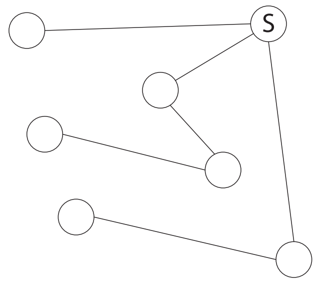


Aufgabe 14. Wir starten wieder mit demselben Graphen:

(a) Fügen Sie eine neue Kante so hinzu, dass alle Knoten höchstens die Distanz 2 von S haben.



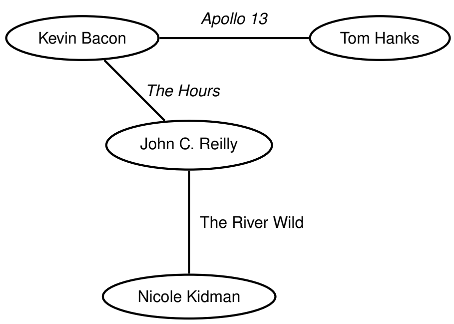
(b) Fügen Sie einen neuen Knoten und drei neue Kanten so hinzu, dass die Distanz des neuen Knotens zu S mindestens 3 ist.



Abstraktion

Aufgabe 15. Wie können wir nun das ”Bacon-Netzwerk” in die Graphentheorie übersetzen? Was ist V, was ist E?

Geben Sie für den untenstehenden Graph V und E an.



Der Algorithmus

Aufgabe 16. Überlegen Sie, wie ein Computer die Bacon-Zahl einer Person im Netzwerk bestimmen könnte. Wie kann man garantieren, dass wir die kürzeste Verbindung gefunden haben? Wie könnten die Instruktionen für einen solchen Algorithmus aussehen?

Falls Sie diese Fragen nicht oder nicht vollständig beantworten können, finden Sie auf der nächsten Seite ein paar Anregungen und Hinweise, wie Sie diesen Algorithmus suchen können.

Anregungen und Hinweise

- Stellen Sie sich vor, Sie müssten in einem grossen Netzwerk der Schauspieler*innen die Bacon-Zahlen bestimmen. Wo werden Sie diesen Auftrag starten?
- Welche Bacon-Zahlen können sehr einfach bestimmt werden?
- Wenn man z.B. bereits alle Knoten mit der Bacon-Zahl 2 kennt, wie sucht man nach denjenigen mit der Bacon-Zahl 3?
- Wenn man bereits alle Knoten mit der Bacon-Zahl n kennt, wie sucht man nach denjenigen mit der Bacon-Zahl $(n+1)$?
  Hinweis: Vielleicht ist die Induktionsidee von weiter oben hilfreich.
- Warum erreicht man so jeden Knoten auf dem kürzesten Weg?

Abschluss

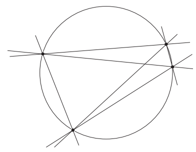
Der Algorithmus, den wir im vorherigen Abschnitt intuitiv entwickelt haben, ist einer der grundlegenden Algorithmen in der Graphentheorie. Er heisst *Breadth-First Search* (zuerst in der Breite suchen) – d.h., in jedem Schritt werden diejenigen Knoten markiert, die man direkt von den Ausgangsknoten erreichen kann.

In unserem Beispiel haben wir den besuchten Knoten noch eine Zahl zugewiesen, was aber den Algorithmus nicht wesentlich ändert.

Die Idee der Induktion, bei der man auf vorhergehende Resultate zurückgreift, um grössere Probleme zu lösen, ist weit verbreitet in der Informatik. Wir haben hier (nur) einen kleinen Einblick in diese Welt gewinnen dürfen. Mit dieser Idee lassen sich jedoch weitaus schwierigere Probleme lösen.

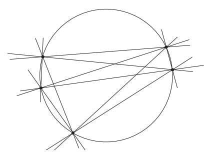
Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1: Es sind insgesamt 6 verschiedene Geraden möglich.



Lösung zu Aufgabe 2: Die Lösung hängt nur von den Anzahl der eingezeichneten Punkte ab.

Lösung zu Aufgabe 3: Es wurden vier neue Geraden gezeichnet – der neue Punkt wurde mit den vier bestehenden verbunden und es entstand jedes Mal eine neue Gerade. Insgesamt gibt es nun 10 Geraden:



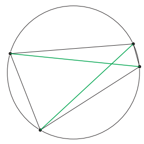
Lösung zu Aufgabe 4: Wir zeichnen 10 zusätzliche Geraden ein und erhalten zum Schluss 55 Geraden.

Lösung zu Aufgabe 5: Es kommen n neue Geraden hinzu. Insgesamt gibt es dann

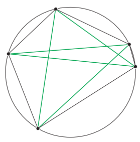
$$1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

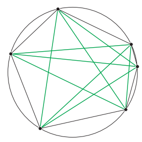
Punkte.

Lösung zu Aufgabe 6: Es gibt genau zwei Diagonalen:



Lösung zu Aufgabe 7: Es gibt 5 resp. 9 Diagonalen.





Lösung zu Aufgabe 8:

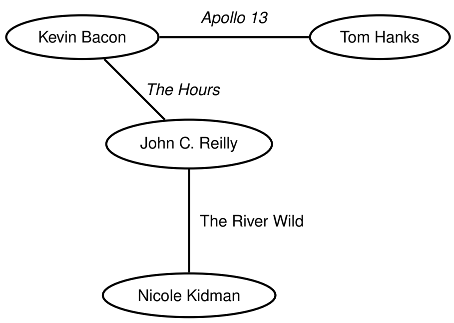
Anzahl Punkte	Anzahl Diagonalen
4	2
5	$2+3=5$
6	$2+3+4=9$
7	$2+3+4+5+6=15$
8	$2+3+4+5+6+7=22$
9	$2+3+4+5+6+7+8=30$
$\vdots$	$\vdots$
n	$2+3+4+\cdots+(n-3)$

Das $(n-3)$ kommt daher, dass ein neuer Punkt nicht mit seinen beiden direkten Nachbarn zu einer Diagonalen verbunden werden kann – deshalb also zwei weniger als bei den Geraden.

Lösung zu Aufgabe 9: In jedem Schritt kommt ein zusätzliches "Dreieck" (also $180°$) dazu.

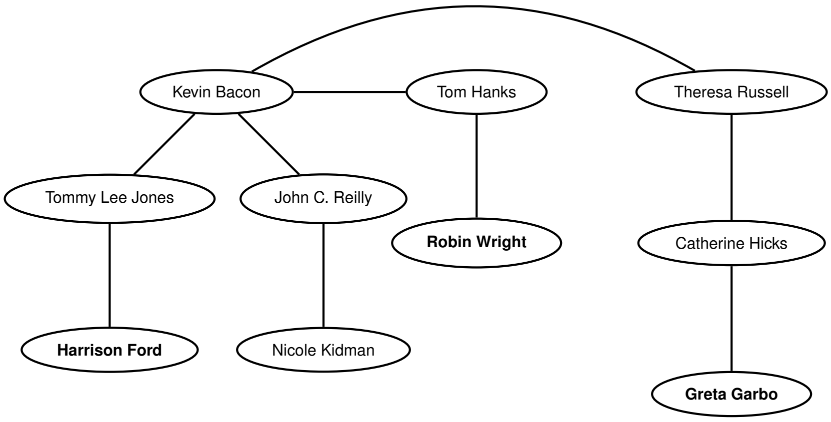
Anzahl Punkte	Winkelsumme
3	$180°$
4	$2 \cdot 180° = 360°$
5	$3 \cdot 180° = 540°$
6	$4 \cdot 180° = 720°$
7	$5 \cdot 180° = 900°$
$\vdots$	$\vdots$
n	$(n-2) \cdot 180°$

Lösung zu Aufgabe 10:



Bemerkung. Dies ist eine von mehreren möglichen Lösungen. Die Filmnamen dienen hier nur zur Kontrolle; im Weiteren werden wir diese weglassen.

Lösung zu Aufgabe 11: z.B.

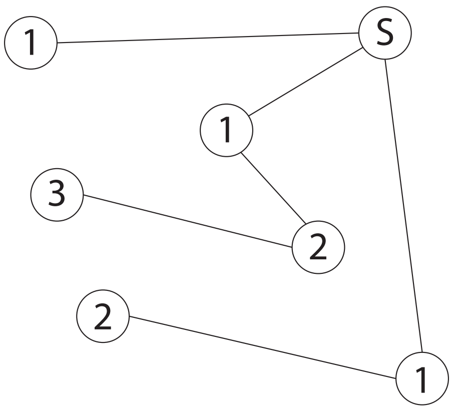


Sie können sich nicht vorstellen, wie lange es gedauert hat eine Bacon-Zahl höher als zwei zu finden…

Lösung zu Aufgabe 12: Kevin Bacon selbst hat die Bacon-Zahl Null – man benötigt null Kanten, um ihn mit sich selbst zu verbinden.

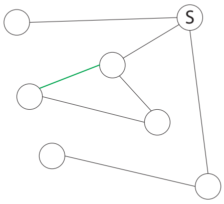
Einer Person, die so nicht erreicht werden kann, gibt man im Allgemeinen die Bacon-Zahl ∞ (unendlich). Im Graph ist das ein *isolierter Knoten*.

Lösung zu Aufgabe 13:

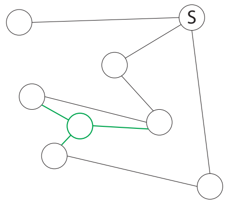


Lösung zu Aufgabe 14:

(a) z.B.



(b) z.B.



Lösung zu Aufgabe 15: Wir repräsentieren jeden/jede Schauspieler*in mit einem Knoten. Falls zwei Schauspieler*innen im selben Film gespielt haben, werden sie mit einer Kante verbunden.

Wir kürzen die Namen ab, um die Übersicht besser zu behalten:

V = {KB, TH, JR, NK}

E = {KB-TH, KB-JR, JR-NK}

Lösung zu Aufgabe 16: Ein Computer wird für jeden Knoten die zugehörige Bacon-Zahl bestimmen. Das geht am einfachsten, wenn man zuerst alle Knoten mit Bacon-Zahl 1 bestimmt, danach Bacon-Zahl 2 usw.

Die Instruktionen könnten z.B. so aussehen:

(1) Starten Sie bei KB.

(2) Suchen Sie alle Knoten, die einen Schritt von KB entfernt sind, und geben Sie ihnen die Bacon-Zahl 1.

(3) Gehen Sie nun alle diese Knoten durch und suchen Sie die Knoten, die von diesen Distanz 1 haben; geben Sie ihnen die Bacon-Zahl 2.

(4) Fahren Sie fort, bis keine weiteren Knoten erreicht werden können.

Da alle erreichbaren Knoten einmal abgesucht wurden, hat so jeder Knoten sicher die kleinstmögliche Bacon-Zahl. Jeder Knoten wird so früh wie möglich erreicht, da man immer alle Knoten mit derselben Bacon-Zahl zusammen bestimmt.