Eine Unterrichtssequenz mit Materialien und Lösungen zum

Konzept der Induktion im Einsatz für das Argumentieren und für die Entwicklung effizienter Algorithmen

Martin Huber, martin.huber3@unifr.ch

29. April 2022

Erstellt im Rahmen der Fachdidaktik II des Lehrgangs GymInf, betreut durch Prof. Dr. Juraj Hromkovič und Regula Lacher

Kommentar für Lehrpersonen: Einbettung, Ziele, weiterführende Ideen

Die vorliegende Unterrichtssequenz dient als Dokumentation der Stärke des Konzeptes der “Induktion”. Dazu bietet sie einen Einblick in zwei Anwendungsbereiche der Induktion: Zum einen die Induktion als Werkzeug zum Argumentieren, zum anderen als Idee für die Entwicklung effizienter Algorithmen.

Die gesamte Unterrichtseinheit ist nicht als erster Kontakt mit der Idee der Induktion gedacht, sondern die Lernenden sollen schon mit der Grundidee vertraut sein (z.B. als Beweisverfahren). Die beiden Teile sind unabhängig voneinander und können so auch nach eigenem Bedarf einzeln eingesetzt werden.

Die Materialien können im obligatorischen Fach Informatik als Vertiefung im Inhaltsbereich “Algorithmen und Programme (o.Ä.)” mit einem Fokus auf den Handlungsebenen “Begründen und Bewerten” sowie “Strukturieren und Implementieren” gemäss dem Dokument “Lehrplanentwurf obligatorisches Fach Informatik” der Schweizer Informatik Gesellschaft (SI) und dem SVIA verwendet werden.

Zum Teil über “Induktion als Argumentationswerkzeug”

Während keine Kenntnisse zu Graphen oder Bäumen vorausgesetzt werden, ist die Sequenz unter der Annahme konzipiert, dass die Lernenden

- das Prinzip der Induktion in einem ersten Kontext in einem Thema der Mathematik oder Informatik kennengelernt haben;
- die Gauss-Formel $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1)$ aus dem Mathematik-Unterricht kennen;
- mit Ungleichungen und Variablen vertraut sind.

Die angestrebten Ziele der Unterrichtssequenz sind, dass die Lernenden

- Bäume und planare Graphen als geometrische Figuren bestehend aus Knoten und Kanten begreifen;
- Fragen zu strukturellen Eigenschaften mit Bäumen und planaren Graphen untersuchen und begründen;
- erfahren, dass geometrische Strukturen induktiv aufgebaut werden können;
- die Induktion als Beweismethode einsetzen;
- die Stärke der Induktion, Probleme mithilfe elementarer Bestandteile schrittweise zu reduzieren, an geometrischen Figuren visualisiert bekommen.

Folgende didaktische Überlegungen sind bei dieser auf das Minimum beschränkte Sequenz zu Bäumen und Graphen zu beachten:

- Der Begriff eines allgemeinen Graphen wird nicht eingeführt, um die Begrifflichkeiten auf das Notwendigste zu reduzieren. Dieses Wissen soll nicht auf Vorrat vermittelt werden, da das zu beweisende Resultat nur auf planare Graphen beschränkt ist.

- Ebenso wird bei Bäumen auf die Wurzel verzichtet, d.h., die Bäume müssen keine hierarchische Ordnung haben. Wir betrachten allgemeine Bäume, aber keine gewurzelten Bäume.
- Es werden keine Adjazenzmatrizen oder -listen betrachtet, da sie für den Eulerschen Polyedersatz für planare Graphen nicht notwendig sind und der Fokus auf der geometrischen Struktur liegen soll.
- Um das Problem von isomorphen Graphen in dieser Sequenz möglichst umgehen zu können, werden die Knoten konsequent nummeriert. Dies führt aber natürlich im Gegenzug zur Tatsache, dass eine Änderung der Nummerierung zu einem anderen Graphen führt, obwohl jegliche geometrischen Eigenschaften gleich sind.

Zum Teil über "Mittelwerte von Datenströmen"

Die spezifischen Voraussetzungen für den Teil über die Entwicklung von effizienten Methoden implizieren, dass die Lernenden

- die Schreibweise von langen Summen mit . . . kennen;
- den Umgang mit indizierten Variablen $x_1, x_2, \ldots$ gewohnt sind.

Die angestrebten Ziele der Unterrichtssequenz sind, dass die Lernenden

- die Induktion als ein Werkzeug erfahren, mit welchem effiziente Algorithmen entworfen werden können;
- von Problematiken im Umgang mit grossen Datenströmen wissen;
- die Anzahl Grundoperationen als Mass für die Komplexität eines Algorithmus kennen und anwenden;
- erfahren, wie Unterschiede in der Effizienz von Algorithmen analysiert werden können und wie sie sich manifestieren (linear vs. quadratisch);
- mit dem gewichteten arithmetischen Mittel arbeiten.

Weiterführende Ideen zur Aktualisierung von Charakteristiken bei Datenströmen wären

- die Betrachtung des Medians, für welchen keine induktive Möglichkeit vorhanden ist. Davon kann man sich mit Datenströmen $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ und $y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}$ überzeugen, bei denen zwar nach n Datenwerten der gleiche Median vorliegt, jedoch trotz gleichem $x_{n+1} = y_{n+1}$ ein anderer aktualisierter Median nach $n + 1$ Datenwerten resultiert.
- die Betrachtung der Stichprobenvarianz, wofür eine induktive Berechnung wiederum möglich ist (vgl. Searle, Shayle R.; "The Recurrence Formulae for Means and Variances" in "Teaching Statistics, Vol. 1", 1983).

Induktion als Argumentationswerkzeug

Bäume und Graphen sind häufig benutzte Werkzeuge und Datenstrukturen in der Informatik, welche erlauben eine Vielzahl von Problemen zu modellieren, zu analysieren und zu lösen. Für diese Unterrichtseinheit beschränken wir uns auf planare Graphen und Bäume. Dabei wird ausschliesslich ihre graphische Visualisierung mittels Knoten und Kanten in der Ebene genutzt. Weiter wird stets gefordert, dass die planaren Graphen und Bäume zusammenhängend sind. *

Planare Graphen

Ein planarer Graph ist eine zusammenhängende geometrische Figur in der Ebene bestehend aus

- Knoten, visualisiert als Punkte in der Ebene,
- Kanten zwischen zwei unterschiedlichen Knoten, visualisiert als Verbindungslinien,

sodass die Figur folgende Regel `PG` erfüllt:

`PG` Die Knoten müssen so in der Ebene angeordnet werden können und die Kanten müssen so gezeichnet werden können, dass es keine Schnittpunke zwischen Kanten gibt.[a]

Die Anzahl Knoten bzw. Kanten werden in Anlehnung an die englischen Begriffe “vertex” mit V bzw. “edge” mit E bezeichnet.

[a] Ein und der gleiche Graph (charakterisiert durch die Knoten und deren Verbindungen) hat stets verschiedene graphische Darstellungen. Auch für planare Graphen kann man meist eine Visualisierung finden, in welcher sich gewisse Kanten überschneiden. Entscheidend ist stets, dass es möglich ist, sie ohne schneidende Kanten darzustellen.

Zu beachten ist, dass

- in dieser Unterrichtseinheit die Knoten stets mit einer eindeutigen Zahl beschriftet werden und als Kreise mit ihrer Nummer visualisiert sind;
- die Kanten nicht als Strecken visualisiert werden müssen, sondern auch gekrümmte Linien sein dürfen;

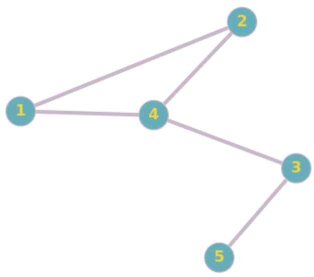
Mit Nummern beschriftete Knoten

Gebogen eingezeichnete Kante

- “zusammenhängend” bedeutet, dass jeder Knoten von einem beliebigen Startknoten aus über eine Aneinanderreihung von Kanten erreicht werden kann;

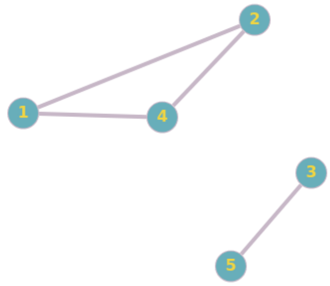
* Für eine vertiefte Auseinandersetzung mit Bäumen und Graphen im Rahmen des obligatorischen Fachs am Gymnasium bietet sich zum Beispiel Kapitel 1 aus dem Lehrmittel “Informatik: Daten verwalten, schützen und auswerten” aus dem Klett und Balmer Verlag des Autorenteams rund um Prof. Dr. Juraj Hromkovič an.

Zusammenhängende Figur



Alle Knoten können von jedem beliebigen anderen Knoten über eine Aneinanderreihung von Kanten erreicht werden, z.B. verbinden die Kanten 2–4 und 4–3 den Knoten 3 mit dem Knoten 2.

Nicht zusammenhängende Figur

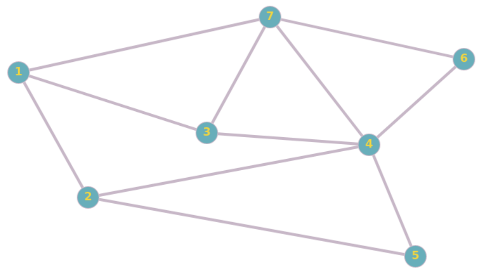


Der Knoten 3 kann nun nicht mehr von einem beliebigen Startknoten erreicht werden. Zum Beispiel führt keine Kombination von Kanten vom Knoten 2 zum Knoten 3.

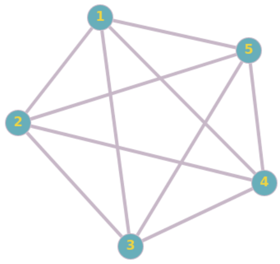
Kernfrage: Ist eine Figur ein planarer Graph?

Zu entscheiden, ob eine zusammenhängende geometrische Figur bestehend aus Knoten und Kanten ein planarer Graph ist, ist im Allgemeinen nicht einfach zu beantworten.

Figur A: Planarer Graph



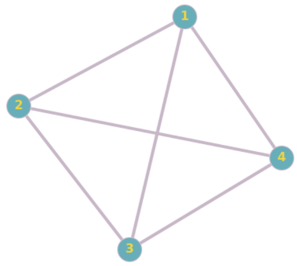
Figur B: Kein planarer Graph



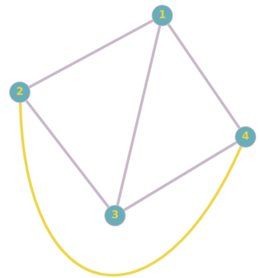
Figur A besteht aus $V = 7$ Knoten und $E = 10$ Kanten und kann so dargestellt werden, dass sich die Kanten nicht schneiden, das heisst, dass sie die Regel **PG** erfüllt und somit ein planarer Graph ist. Figur B besteht aus $V = 5$ Knoten und $E = 10$ Kanten, ist nun aber so dargestellt, dass **PG** nicht erfüllt ist, und somit scheint die Figur kein planarer Graph zu sein.

Jedoch greift die Erklärung, dass Figur B nicht planar ist, zu kurz. Denn es wäre ja möglich, dass man die Kanten anders einzeichnen könnte, die Knoten anders platziert und dann auf einmal eine Darstellung ohne sich schneidende Kanten entsteht. Diese Situation wird mit den Figuren C illustriert, für welche eine Darstellung mit sich schneidenden Kanten gegeben ist und eine Darstellung dann aber gefunden werden kann, in der sich die Kanten nicht schneiden.

Figur C: Scheinbar kein planarer Graph. dieser Darstellung wäre es kein planarer Graph, da sich zwei Kanten schneiden.



Figur C: Eben doch ein planarer Graph. Da die Kanten nicht als Strecken visualisiert werden müssen, ist es möglich, die Knoten 2 und 4 zu verbinden (s. gelbe Kante), ohne die anderen Kanten zu schneiden.



Somit ist Figur C ein planarer Graph, da es **mindestens eine** Darstellung ohne sich schneidende Kanten gibt. Für die Figur B liegt aber noch keine vollständige Argumentation vor, ob diese Figur ein planarer Graph ist oder nicht.

Aufgabe 1 Löse folgende Aufgaben zu den Figuren A und B, um die Bedeutung der Regel **PG** besser zu verstehen und die Schwierigkeit, diese zu überprüfen, zu erfahren.

a) Finde eine Darstellung für die Figur A, sodass sich Kanten schneiden.
b) Finde eine Darstellung für die Figur B, sodass Du möglichst wenig Schnittpunkte zwischen Kanten hast.

Auch wenn Eure Klasse nun viele verschiedene Darstellungen für Figur B ausprobiert hat, kann immer noch nicht mit Sicherheit entschieden werden, ob ein planarer Graph vorliegt. Denn die Darstellungen sind sehr vielfältig, jedoch haben sie einige ähnliche Eigenschaften.

Ziel, Vorgehen und zentrales Konzept

Das Ziel im Folgenden ist die Frage zu entscheiden:

Ist Figur B ein planarer Graph?

Dazu wird eine Charakteristik von planaren Graphen genauer untersucht. Die Vorgehensweise ist folgendermassen:

a) Untersuchung einer "einfachen" Klasse von planaren Graphen, den sogenannten Bäumen.
b) Verallgemeinerung der Argumente von Bäumen auf allgemeine planare Graphen.
c) Anwendung der Erkenntnisse für die Fragestellung zu Figur B.

Dabei wird das Konzept der **Induktion** angewendet, um eine spezielle Eigenschaft von Bäumen und planaren Graphen zu ergründen. Der angewandte Kerngedanke der Induktion im Zusammenhang mit geometrischen Figuren ist:

Wenn eine Figur ausgehend von einer einfachen Startsituation mittels Hinzufügen von Einzelteil um Einzelteil erstellt werden kann, dann können auch die Eigenschaften von grossen Figuren aus den Eigenschaften kleinerer Figuren hergeleitet werden.

Vereinfachte Situation: Untersuchung von Bäumen

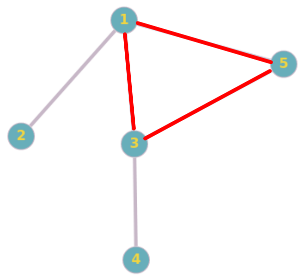
Bäume

Betrachte wiederum zusammenhängende geometrische Figuren in der Ebene bestehend aus Knoten und Kanten, sodass die Figur folgende Regel **B** erfüllt:

B Die Figur enthält keinen `Kreis`. Unter einem Kreis versteht man einen Rundgang auf der Figur,
- der bei einem bestimmten Startknoten startet;
- entlang von Kanten geht, wobei keine mehrmals benutzt werden darf;
- wieder zum Startknoten zurückführt.

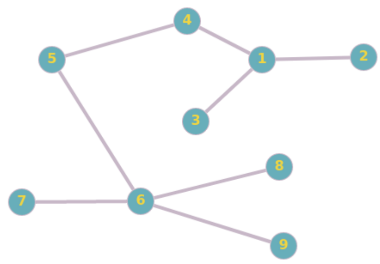
Die Anzahl Knoten bzw. Kanten wird weiterhin mit V bzw. E bezeichnet.

Figur D: Planarer Graph, kein Baum.



Der planare Graph beinhaltet einen Kreis, startend vom Knoten 1 via 3 und 5 zurück zu 1. Damit ist er kein Baum.

Figur E: Planarer Graph und Baum.



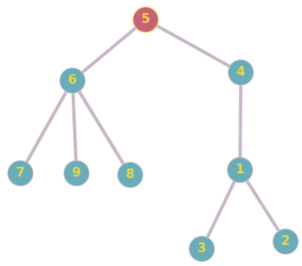
Der planare Graph beinhaltet keine Kreise und erfüllt somit die Regel **B**.

Aufgabe 2 Zeichne

a) einen Baum mit einer Kante;
b) einen Baum mit zwei Kanten;
c) zwei unterschiedliche Bäume mit drei Kanten;
d) drei unterschiedliche Bäume mit vier Kanten.
e) Zähle jeweils, wie viele Kanten E und Knoten V jeder einzelne von Dir gezeichnete Baum hat. Stelle eine Vermutung auf und versuche diese zu begründen.

Hierarchische Darstellung von Bäumen. In einer Vielzahl von Anwendungen werden Bäume hierarchisch dargestellt. Dies ist nicht relevant für diese Unterrichtseinheit, jedoch häufig die Darstellung von Bäumen, der als Erstes begegnet wird.

Figur E: Hierarchisch dargestellt.



Ein Knoten wird speziell als "Wurzel" gekennzeichnet. Die Bäume wachsen dann, im Gegensatz zum biologischen Vorbild, von der Wurzel an von oben nach unten: Zuoberst ist die Wurzel, hier der Knoten 5, und dann finden sich in der ersten Ebene unter der Wurzel alle Knoten, die über eine Kante mit der Wurzel verbunden sind, in der zweiten Ebene dann alle Knoten, von der die Wurzel über genau zwei Kanten erreicht wird etc.

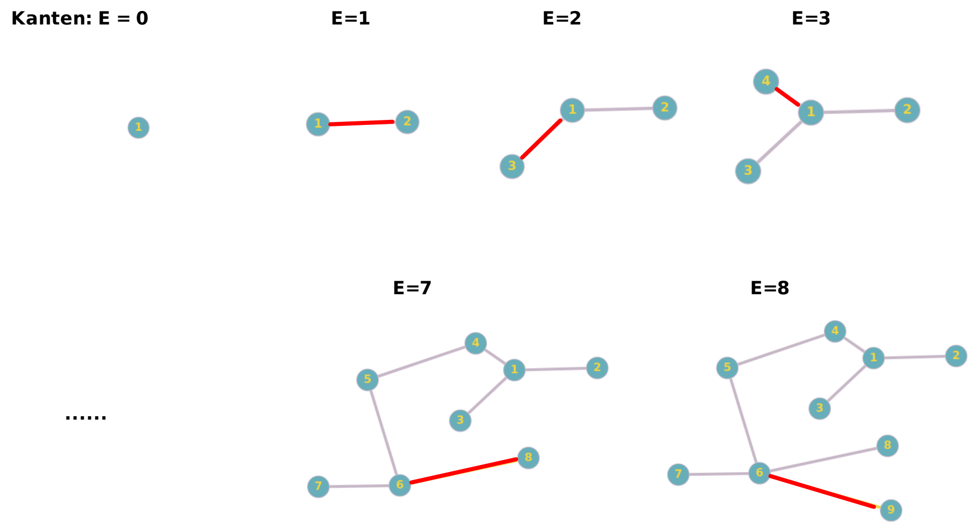
Induktion beim Erstellen von Bäumen über die Anzahl Kanten E

Das Zeichnen eines Baumes kann als induktiver Prozess beschrieben werden, wobei die Anzahl Kanten E in jedem Schritt um eins erhöht wird:

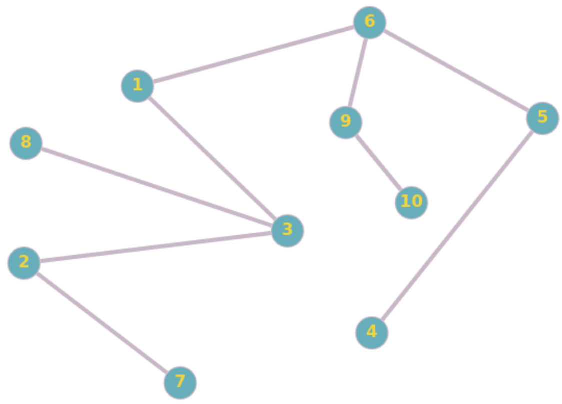
Start $E = 0$ Jeder Baum startet als Figur bestehend aus einem einzelnen Knoten.

Schritt $E \longrightarrow E + 1$ Dann wird schrittweise eine Kante nach der anderen hinzugefügt, bis der gewünschte Baum erhalten wird. Dabei verändert sich die Anzahl Kanten E in jedem Schritt um +1 und wird somit zu $E + 1$.

Beispiel: Induktives Zeichnen des Baumes "Figur F". Die Figur F kann demnach schrittweise aufgebaut werden, indem mit $E = 0$ und nur dem Knoten 1 gestartet wird, und anschliessend die Anzahl Kanten immer um eins erhöht wird, bis zum Schluss der gesamte Baum vollständig vorliegt.



Aufgabe 3 Gegeben ist der folgende Baum.



Kanten E	Knoten V
0	
1	
2	
3	
⋮	

a) Zeichne die einzelnen Zwischenschritte auf, wie der Baum aus einer Figur mit einem Knoten und $E = 0$ Kanten schrittweise aufgebaut werden kann, indem stets eine neue Kante hinzugefügt wird.
b) Wie verändert sich die Anzahl Knoten V bei jedem einzelnen Schritt? Vervollständige dazu die obenstehende Tabelle. Begründe Deine Beobachtung.

Aufgabe 4 Treffe nun Aussagen zu den Anzahl Knoten V unabhängig davon, wie der Baum aussieht. Wie viele Knoten hat ein Baum, wenn er

a) $E = 100$ Kanten hat;
b) $E = 237$ Kanten hat;
c) $E = m$ Kanten hat;
d) aus einem Baum entsteht, der 123 Kanten hat und dem eine neue Kante hinzugefügt wird;
e) aus einem Baum entsteht, der E Kanten hat und dem eine neue Kante hinzugefügt wird.

Aufgabe 5 Die allgemeine Behauptung lautet nun, wie Du selbst in den vorangegangenen Aufgaben erfahren hast, dass für jeden Baum gilt, dass:

$$\text{“Anzahl Knoten - Anzahl Kanten gleich 1”, d.h.} \qquad V - E = 1$$

Diese Behauptung kann für alle Bäume induktiv gezeigt werden. Ein induktiver Beweis benötigt folgende zwei Teile:

- *Induktionsstart:* Für die einfachsten aller Bäume, nämlich Bäume bestehend aus einem Knoten und keiner Kante, gilt die Behauptung, da $V = 1, E = 0$ und somit $V - E = 1$.
- *Induktionsschritt:* Nehme an, dass $V - E = 1$ für alle Bäume stimmt, welche entweder $E = 0, E = 1, E = 2, \ldots, E = n$ haben, d.h. für alle Bäume mit maximal n Kanten. Nun hat man aber einen Baum mit $E = n + 1$, für welchen die Formel somit noch nicht bewiesen ist. Deshalb ist das Ziel, den Baum mit $E = n + 1$ so zu reduzieren, dass man auf das Wissen für Bäume mit n Kanten zurückgreifen kann.

Dies wird in den folgenden Teilaufgaben durchgeführt.

a) Betrachte einen Baum mit mindestens zwei Knoten. Weshalb hat ein derartiger Baum stets einen Knoten, der mit nur einer einzigen Kante verbunden ist?

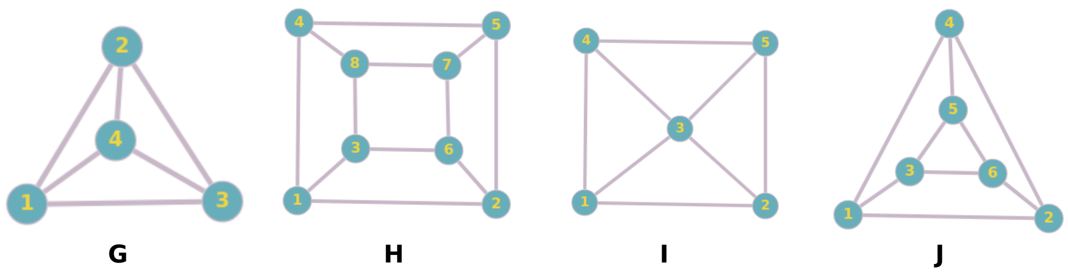
Gegeben sei ein Baum (genannt F_{original}) mit $E = n + 1$ Kanten. Dieser hat gemäss Teilaufgabe a) einen Knoten, der nur mit einer Kante verbunden ist. Werden dieser Knoten und diese Kante aus dem Baum entfernt, erhält man eine verkleinerte Figur $F_{\text{reduziert}}$.

b) Weshalb ist $F_{\text{reduziert}}$ wiederum ein Baum?
c) Wie viele Kanten hat $F_{\text{reduziert}}$?
d) Wie gross ist demnach die Anzahl Knoten für $F_{\text{reduziert}}$?
e) Was lässt sich daraus für die Anzahl Knoten V von F_{original} schliessen?
f) Beschliesse die Argumentation, indem Du überprüfst, dass demnach auch für alle Bäume mit $n + 1$ Knoten die Formel "Anzahl Knoten - Anzahl Kanten gleich 1" gilt.
g) Weshalb ist nun damit gezeigt, dass auch ein Baum mit 203'834 Kanten genau 203'835 Knoten hat?

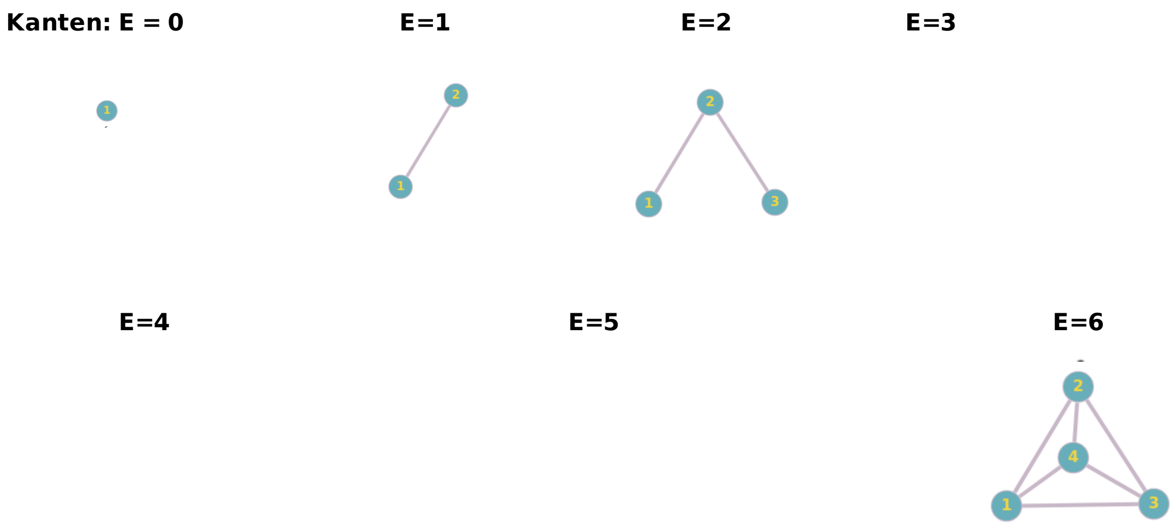
Induktives Erstellen von planaren Graphen

Wie im vorigen Abschnitt Bäume induktiv "wachsen gelassen" wurden und damit eine allgemeine Eigenschaft zur Anzahl Knoten und Kanten gezeigt werden konnte, wenden wir das gleiche Prinzip auf planare Graphen an, um schliesslich die Frage, ob Figur B ein planarer Graph ist, zu entscheiden.

Aufgabe 6 Das Zeichnen eines planaren Graphen kann ebenfalls als induktiver Prozess beschrieben werden, wobei die Anzahl Kanten E in jedem Schritt um eins erhöht wird. Wir betrachten die planaren Graphen G, H, I, J.



a) Vervollständige den angefangenen Prozess für den planaren Graphen G.



b) Notiere ebenfalls in jedem Schritt, wie viele Knoten V der planare Graph enthält. Welche Unterschiede zu den Beobachtungen bei den Bäumen stellst Du fest?

c) Zeichne den Entstehungsprozess auch für den planaren Graphen H auf. Führe wiederum Buch über die Anzahl Knoten V und bestätige Deine Funde aus Teilaufgabe b).

d) Weshalb stimmt die Formel $V - E = 1$ nicht mehr?

e) Versuche Deine Erkenntnisse in der untenstehenden Box in Worten zu fassen, indem Du einen Vorschlag für die beiden Fälle beim Schritt $E \longrightarrow E + 1$ machst. *Tipp:* Der Fall 1 ist analog zum Vorgehen bei Bäumen, der Fall 2 hingegen beschreibt den Unterschied, den Du in Teilaufgabe b) gefunden hast.

Induktion beim Erstellen von planaren Graphen über die Anzahl Kanten E

Das Zeichnen eines planaren Graphen kann ebenfalls als induktiver Prozess beschrieben werden, wobei die Anzahl Kanten E in jedem Schritt um eins erhöht wird.

- $E = 0$ Jeder planare Graph startet als Figur bestehend aus einem einzelnen Knoten.
- $E \longrightarrow E + 1$ Dann wird schrittweise eine Kante nach der anderen hinzugefügt, bis der gewünschte planare Graph entstanden ist. Dabei lassen sich zwei Fälle unterscheiden, wie die Anzahl Kanten E auf $E + 1$ erhöht werden kann.
  - Fall 1: ______________________________

    ____

    ____
  - Fall 2: ______________________________

    ____

    ____

Aufgabe 7 Betrachte wiederum die planaren Graphen G-J aus Aufgabe 6. Bestimme nun jeweils nebst der Anzahl Knoten V und Anzahl Kanten E auch noch die Anzahl F der sogenannten **Gebiete**. Die Zahl F beschreibt, in wie viele voneinander getrennte Flächen die Kanten des planaren

Graphen die komplette zweidimensionale Ebene teilen. **Beachte:** Das unendlich grosse Gebiet um den planaren Graphen zählt stets auch als ein Gebiet.

a) Fülle die untenstehende Tabelle aus.

Planarer Graph	Kanten E	Knoten V	Gebiete F	Regelmässigkeit ?
G				
H				
I				
J				

b) Suche nach einem Zusammenhang von V, E und F. Formuliere ihn in Worten und als Formel.

Eulerscher Polyedersatz für planare Graphen

In jedem planaren Graphen gilt:

$$V \ldots E \ldots F = \ldots$$

D.h. in Worten

"Anzahl Knoten" ... "Anzahl Kanten" ... "Anzahl Gebiete" = ...

Aufgabe 8 In Aufgabe 6 wurde für den planaren Graphen G der induktive Prozess protokolliert, wie dieser Kante für Kante entsteht. Vervollständige untenstehende Tabelle, indem Du

a) in jedem Schritt zählst, wie viele Knoten, Kanten und Gebiete existieren;
b) jeweils sagst, nach welcher Regel, "Fall 1" oder "Fall 2", der neue planare Graph aus dem Vorgänger entstanden ist;
c) protokollierst, um wie viel sich jeweils die Anzahl Knoten und Flächen verändert hat.

Kanten E	Knoten V	Gebiete F	Fall 1 oder 2?	Veränderung bei V	Veränderung bei F
0	1	1	-	-	-
1	2	1	Fall 1	+1	0
2					
3					
4					
5					
6					

Löse weiter folgende Teilaufgaben:

d) Erstelle eine analoge Tabelle für den planaren Graphen H.
e) Welche Regelmässigkeiten entdeckst Du? Begründe Deine Erkenntnisse.

Aufgabe 9 Wie viele Knoten V, Kanten E und Gebiete F hat ein planarer Graph, der mittels Erhöhung der Kantenanzahl um 1 aus einem planaren Graphen :

a) mit $E = 12, V = 10, F = 4$ gemäss "Fall 1" erstellt wurde;
b) mit $E = 12, V = 10, F = 4$ gemäss "Fall 2" erstellt wurde;
c) mit $E = n, V = m, F = p$ gemäss "Fall 1" erstellt wurde;

d) mit $E = n, V = m, F = p$ gemäss "Fall 2" erstellt wurde.

Aufgabe 10 Um den allgemeinen Zusammenhang zwischen V, E und F für planare Graphen endgültig zu beweisen, gehen wir analog zur Aufgabe 5 für Bäume vor.

a) *Induktionsstart:* Überprüfe, dass die Formel für einen planaren Graphen mit $E = 0$ Kanten stimmt.
b) *Induktionsschritt:* Bis jetzt sei gezeigt, dass die Formel für planare Graphen mit $E = 0, 1, 2, \ldots, n$ korrekt sei. Nun liege ein planarer Graph mit $E = n + 1$ Kanten vor, den wir G_{original} nennen. Weiter bezeichnen V und F die Anzahl Knoten und Gebiete des planaren Graphen G_{original}. Um den Graphen G_{original} auf einen Graphen mit n Kanten zurückzuführen, gibt es zwei Fälle:
   i) "Fall 1" rückgängig machen:
      - Welche Voraussetzungen müssen bestehen, damit dieser Fall 1 rückgängig gemacht werden kann?
      - Weshalb ist die entstandene reduzierte Figur $G_{\text{reduziert}}$ wiederum ein planarer Graph?
      - Wie viele Knoten, Gebiete und Kanten hat $G_{\text{reduziert}}$, drücke dies als Formeln mit n, V und F aus.
      - Weshalb gilt für $G_{\text{reduziert}}$ die Formel "Anzahl Knoten + Anzahl Gebiete - Anzahl Kanten = 2".
      - Nutze dies aus, um zu zeigen, dass dann die Eulersche Polyederformel auch für G_{original} gilt.
   ii) "Fall 2" rückgängig machen: Beantworte wiederum die gleichen Fragen wie beim vorigen Punkt.

Aufgabe 11 Nun zeigen wir, dass Figur B mit $V = 5$ und $E = 10$ wirklich kein planarer Graph ist. Grundlage dafür ist das Resultat, dass für planare Graphen mit mehr als 3 Knoten und mindestens zwei Gebieten, d.h. $V \geq 3$ und $F \geq 2$, gilt:

$$E \leq 3 \cdot V - 6.$$

a) Formuliere die obige Ungleichung in Worten.
b) Nutze die Ungleichung, um zu schlussfolgern, dass Figur B kein planarer Graph sein kann.
c) Fülle folgenden Lückentext aus, um die Ungleichung zu begründen.
   - Jede einzelne Kante kann höchstens zum Rand von ____________ Gebiete gehören.
   - Jedes einzelne Gebiet wird durch mindestens ____________ Kanten umrandet.
   - Zusammengefasst gilt demnach
   $$3 \cdot F \leq 2 \cdot E,$$
   da ________________________. Damit gilt aber auch:
   $$F \leq \ldots E$$
   - Gemäss Eulerschem Polyedersatz und voriger Ungleichung für F erhalten wir:
   $$2 = V \ldots F \ldots E \leq V \ldots \ldots \cdot E \ldots E = V - \ldots \cdot E$$
   - Wird auf beiden Seiten der Ungleichung plus $\ldots \cdot E$ und minus 2 gerechnet, ergibt sich:
   $$\ldots \cdot E \leq V \ldots \ldots$$
   - Die zu Beginn der Aufgabe postulierte Ungleichung für E ergibt sich nun, wenn man die Ungleichung aus dem letzen Schritt mit ____________________.

Mittelwerte von Datenströmen effizient aktualisieren

Aufgabe 12 In einem Semester eines Schulfaches führt die Lehrperson vier Prüfungen durch, welche alle als eine ganze Note zählen.

a) Eine Person A hat die Noten 4.5, 3.7, 5.2 und 5.1 erhalten. Berechne den Semesterdurchschnitt.
b) Eine Person B hat nach den ersten drei Prüfungen einen Durchschnitt von 4.8 und erhält in der vierten Prüfung die Note 4.2. Was ist ihr Semesterdurchschnitt?
c) Eine Person C hat nach den ersten drei Prüfungen einen Durchschnitt von 3.1. Welche Note ist in der vierten Prüfung notwendig, um einen Semesterdurchschnitt von 3.8 zu erhalten?
d) Eine Person D hat in den ersten beiden Prüfungen die Noten 5.3 und 4.2 erhalten. Welchen Notendurchschnitt muss die Person in den zwei ausstehenden Prüfungen haben, um einen Semesterdurchschnitt von 5.0 zu erreichen?
e) Eine Person E hat nach den vier Prüfungen einen Semesterdurchschnitt von 4.6. Die Lehrperson kündigt zum Semesterende an, dass die schlechteste Note gestrichen werde. Für Person E wird die Note 3.1 gestrichen. Wie lautet ihr neuer Semesterdurchschnitt nach Abzug der Streichnote.

Aufgabe 13 In einem Semester eines Schulfaches hat die Lehrperson schon vier Prüfungen (P1, P2, P3, P4) durchgeführt, welche unterschiedlich gewichtet für den Semesterdurchschnitt zählen. Weiter bietet sie eine freiwillige Prüfung (P5) an, welche mit 50% gewichtet wird.

P1	P2	P3	P4	P5
100%	50%	50%	100%	50%

a) Person A hat in den Prüfungen der Reihe nach die Noten 5.6, 4.1, 5.2 und 5.9 erreicht. Berechne den aktuellen Semesterdurchschnitt.
b) Person B hat nach den ersten vier Prüfungen einen Durchschnitt von 4.5 und schreibt in P5 die Note 6. Berechne den neuen Semesterdurchschnitt.
c) Person C hat vergessen, wie gross die Gewichtung der einzelnen Noten ist. Nach der Prüfung P4 hat sie einen Durchschnitt von 5.2 und in P5 erreicht sie die Note 5.5. Wie kann sie den neuen Semesterdurchschnitt berechnen?

Grundproblematik: Mittelwerten berechnen während der Erhebung neuer Daten

Die Situation, die ein Lernender bei der Berechnung von aktuellen Notendurchschnitten hat, findet sich ähnlich in vielen anderen Situationen, wo Daten fortlaufend berechnet, gemessen oder erhoben werden, der Wunsch jedoch besteht, stets Zwischenresultate z.B. einen Durchschnitt zu haben, die die bisheringen Daten charakterisieren.

Formalisiert treffen wir folgende Situation an:

- Daten in Form von reellen Zahlen werden fortlaufend erhoben. Diese Daten oder Messwerte sind als $x_1, x_2, x_3, \ldots$ durchnummeriert benannt. Die Folge von stets neu eintreffenden Daten wird ein *Datenstrom* genannt.

- Nach der Erhebung jedes neuen Messwertes besteht Interesse an bestimmten Charakteristiken:
  - Gestartet wird mit der Erhebung des ersten Messwerts x_1.
  - Nachdem man den zweiten Wert x_2 erhalten hat, soll nun der Mittelwert der Datenmenge x_1, x_2 berechnet werden (idealerweise schon, bevor x_3 bekannt ist).
  - Nachdem man den dritten Wert x_3 erhalten hat, soll nun der Mittelwert der Datenmenge x_1, x_2, x_3 berechnet werden (idealerweise schon, bevor x_4 bekannt ist).
  - ...
  - Nachdem man den 73-ten Wert x_{73} erhalten hat, soll nun der Mittelwert der Datenmenge $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{73}$ berechnet werden (idealerweise schon, bevor x_{74} bekannt ist).
  - ...
  - Nachdem man den n-ten Wert x_n erhalten hat, soll nun der Mittelwert zur Datenmenge $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ berechnet werden (idealerweise schon, bevor x_{n+1} bekannt ist).
  - ...
- Je nachdem ist zum Startzeitpunkt gar nicht bekannt, wie viele Datenwerte $x_{\ldots}$ erhoben werden.

Beispiele: Datenströme, die zuweilen riesige Datenmengen generieren und deren Auswertung in Echtzeit gewünscht ist, finden sich in vielen relevanten Einsatzgebieten verschiedener Disziplinen. Die folgenden zwei Beispiele dienen der Illustration:

- Aufzeichnung von Messwerten bei der Durchführung von Experimenten: Soll ein Prozess während einer gewissen Zeitspanne überwacht werden, indem in regelmässigen Zeitabständen Messwerte erhoben werden, stellt dies einen Datenstrom dar. Dabei kann es von Interesse sein, stets den aktuellen Mittelwert oder den bisherigen maximalen oder minimalen Wert bestimmt zu haben.
- Bestellungen in einem Online-Shop: Während bei der Erhebung von Messwerten die Regelmässigkeit und die Anzahl der Datenpunkte selbst gewählt werden kann, sind diese Eigenschaften beim Eingang von Bestellungen eines Online-Shops weder planbar, noch exakt vorhersehbar. Aktuelle Tageskennzahlen wären in dieser Situation zum Beispiel der durchschnittliche Einkaufsbetrag oder der bisher beliebteste Artikel. Diese werden dabei in Echtzeit aus den neu eintreffenden Daten im Datenstrom errechnet.

Vorwissen: Mittelwerte von Stichprobendaten

Für eine gegebene Stichprobe bestehend aus n erhobenen Daten $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ist das (ungewichtete) **arithmetische Mittel** $\overline{x}_n$ der ersten n Messwerte $x_1, \ldots, x_n$ definiert durch:

$$\overline{x}_n = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-1} + x_n}{n}$$

Das arithmetische Mittel wird häufig auch vereinfacht *Durchschnitt* genannt.

Aufgabe 14 Um den Aufwand zur Berechnung des arithmetischen Mittels zu messen, zählen wir die Anzahl Grundrechenoperationen $+, -, \cdot, :$, die für die Berechnung von $\overline{x}_n$ benötigt werden. *Beispiel:* Um das Mittel nach vier Werten zu berechnen, führt man die Rechnung $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) : 4$ aus, d.h. 4 Rechenoperationen (dreimal eine Addition und einmal eine Division).

a) Notiere in der Tabelle, wie viele Operationen notwendig sind, um das arithmetische Mittel für die gegebene Anzahl Datenwerte zu berechnen.

Anzahl Datenwerte n	1	2	3	4	5	10	73	100	N
Anzahl Operationen	1			4					

Der Einfachheit halber sagen wir, dass für $n = 1$ eine Operation nötig ist, da $\overline{x}_1 = (x_1) : 1$, wobei eigentlich keine notwendig wäre, da die Division durch 1 keinen Effekt hat.

b) Wie viele Operationen wurden insgesamt ausgeführt, wenn das arithmethische Mittel $\overline{x}_n$ nacheinander für
- $n = 1, 2, 3, 4, 5$, d.h., man berechnet $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4, \overline{x}_5$,
- $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, d.h., man berechnet $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4, \overline{x}_5, \overline{x}_6$,
- $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, d.h., man berechnet $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_{10}$,
- $n = 1, 2, 3, 4, \ldots, 100$, d.h., man berechnet $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_{100}$,
- $n = 1, 2, 3, 4, \ldots, N$, d.h., man berechnet $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_N$,

berechnet wird.

Die induktive Berechnung des arithmetischen Mittels

Aus den Aufgaben zu den Semesterdurchschnitten von Schulnoten haben wir gelernt, dass zur Berechnung des neuen Notendurchschnitts bei Eintreffen einer neuen Note gar nicht alle vorhergehenden Noten bekannt sein müssen. Diese Idee wird die Gesamtanzahl von Operationen zur Berechnung des arithmetischen Durchschnitts beträchtlich reduzieren.

Grundidee: Neuer Durchschnitt basierend auf dem vorhergenden Durchschnitt

Die Situation präsentiert sich wie folgt:

- **Bisher bekannt:**
  - Die Anzahl n der bisher schon erhaltenen Datenwerte.
  - Der Durchschnitt $\overline{x}_n$ der ersten n Datenwerte.
- **Nicht mehr zwingend bekannt:** Die expliziten Werte von $x_1, \ldots, x_n$.
- **Neu aus dem Datenstrom erhalten:** Der neueste Datenwerte x_{n+1}.
- **Neu zu berechnen:** Der Durchschnitt $\overline{x}_{n+1}$, der nun auch den neuesten Datenwert x_{n+1} berücksichtigt.

Auch wenn die Werte von $x_1, \ldots, x_n$ nicht mehr bekannt sind, gilt weiterhin, dass $\overline{x}_n = \frac{1}{n} \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$. Durch Multiplikation der Gleichung mit n erhält man:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = n \cdot \overline{x}_n$$

Somit kann die Summe der ersten n Datenwerte aus der Anzahl Datenwerte n und dem bisherigen Durchschnitt $\overline{x}_n$ rekonstruiert und bei der effizienten Berechnung des nächsten Durchschnitts benutzt werden.

Effiziente Berechnung von $\overline{x}_{n+1}$: Nach Definition gilt, dass

$$\overline{x}_{n+1} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1}}{n+1},$$

wobei, wie soeben gesehen (und orange markiert), die Summe der ersten n (der alten) Datenwerte aus n und $\overline{x}_n$ rekonstruiert werden kann. Somit ergibt sich die effizientere Berechnung basierend auf dem vorigen Durchschnitt

$$\overline{x}_{n+1} == \frac{n \cdot \overline{x}_n + x_{n+1}}{n+1}$$

für $n \geq 1$. Als Start-Durchschnitt für den ersten Datenwert wird $\overline{x}_1 = x_1$ gesetzt. Damit wird der alte Durchschnitt $\overline{x}_n$ mithilfe von n und x_n aktualisiert, ohne nochmals die ganze Summe $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ berechnen zu müssen.

Aufgabe 15 Die täglich gemessene Durchschnittstemperatur vom 1. - 7. März 2022 in Ilanz (Kanton Graubünden, Region Surselva) ist in der folgenden Tabelle aufgelistet.

Datum	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Temperatur x_i in °C	2.9	4.9	5.5	2.8	0.2	-1.4	-0.5

a) Betrachte den Datenstrom der Temperaturwerte x_i. Berechne mithilfe der effizienten Variante die Durchschnitte $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \ldots, \overline{x}_{10}$. Notiere jeweils die Rechnung, die Du ausführst, und zähle die Anzahl Grundoperationen, die Du dabei benötigst. Runde auf zwei Nachkommastellen.

n	Neuer Datenwert x_n	Rechnung	Durchschnitt $\overline{x}_n$	Anzahl Operationen
1	$x_1 = 2.9$	2.9	2.9	0
2	$x_2 = 4.9$	$(1 \cdot 2.9 + 4.9) : 2$	3.9	3
3	$x_3 = 5.5$	$(2 \cdot 3.9 + 5.5) : 3$	4.43	3
4				
5				
6				
7				

b) Zähle zusammen und prognostiziere, wie viele Operationen nötig sind für die Berechnung der arithmetischen Mittel für:
- $n = 1, 2, 3, 4, 5$
- $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$
- $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$
- $n = 1, 2, 3, 4, \ldots, 100$
- $n = 1, 2, 3, 4, \ldots, N$

Aufgabe 16 Der Datenstrom bestehe nun nicht nur aus den Daten x_i, sondern jeder Wert komme noch mit einem Gewicht w_i, so, wie es in der Aufgabe 13 mit den gewichteten Prüfungsnoten der Fall war. Das heisst, der Datenstrom besteht aus Datenpaaren $(x_1, w_1), (x_2, w_2), (x_3, w_3), \ldots$ Für diesen Datenstrom soll das gewichtete arithmetische Mittel

$$\overline{x}_n = \frac{x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 + \ldots x_n \cdot w_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

effizient mithilfe einer induktiven Vorgehensweise berechnet werden.

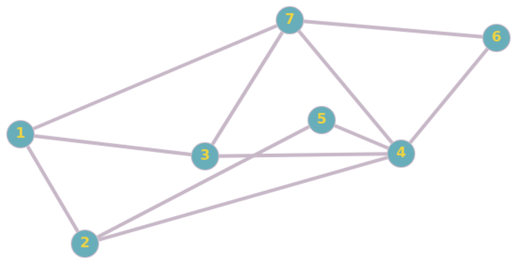
a) Notiere die Formeln für $\overline{x}_4$ und für $\overline{x}_5$. Markiere die gemeinsamen Terme.
b) Bezeichne mit W_4 die Summe der ersten 4 Gewichte $W_4 = w_1 + w_2 + w_3 + w_4$. Versuche eine Formel für $\overline{x}_5$ zu finden, welche nur $\overline{x}_4$, W_4 und die Werte des neuen Datenpaares (x_5, w_5) enthält.
c) Bezeichne mit W_n die Summe der ersten n Gewichte $W_n = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n$. Versuche eine Formel für $\overline{x}_{n+1}$ zu finden, welche nur $\overline{x}_n$, W_n und die Werte des neuen Datenpaares (x_{n+1}, w_{n+1}) enthält.

Lösungen zu den Aufgaben

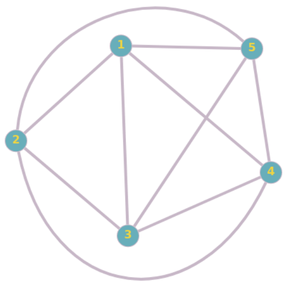
Lösungen zum Teil “Induktion als Argumentationswerkzeug”

Lösung zu Aufgabe 1

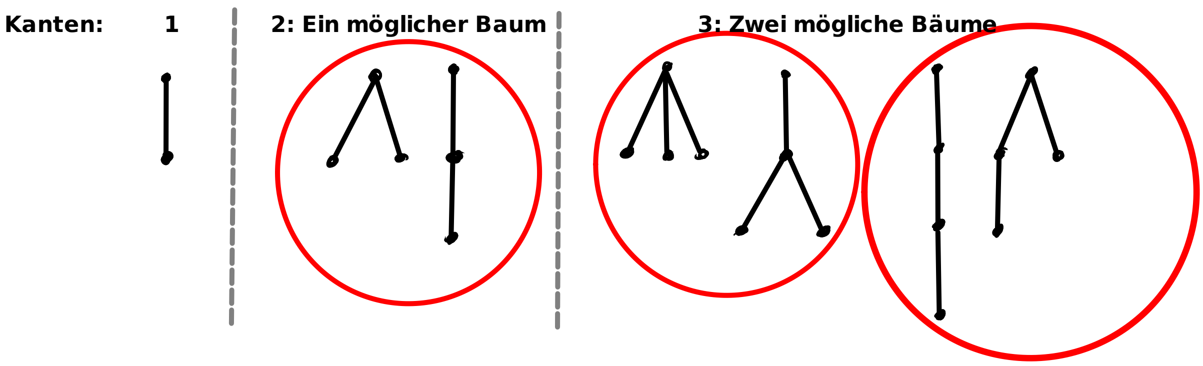
Teilaufgabe a: Es kann beliebig ein Knoten so verschoben werden, dass er im Inneren der Figur liegen wird, z.B. der Knoten 5 nach oben ins Dreieck zwischen den Knoten 3, 4 und 7 (s. Abbildung rechts). So gibt es relativ schnell sich schneidende Kanten.



Teilaufgabe b: Viele Darstellungen können ausprobiert werden, indem Knoten verschoben werden oder Kanten gebogen eingezeichnet werden. Jedoch scheint es wirklich so, als ob stets mindestens ein Schnittpunkt bestehen bleibt (s. Abbildung rechts). Da die Anzahl Darstellungen aber derart gross ist, könnte es aber ja immer noch sein, dass die passende Visualisierung nicht gefunden wurde.

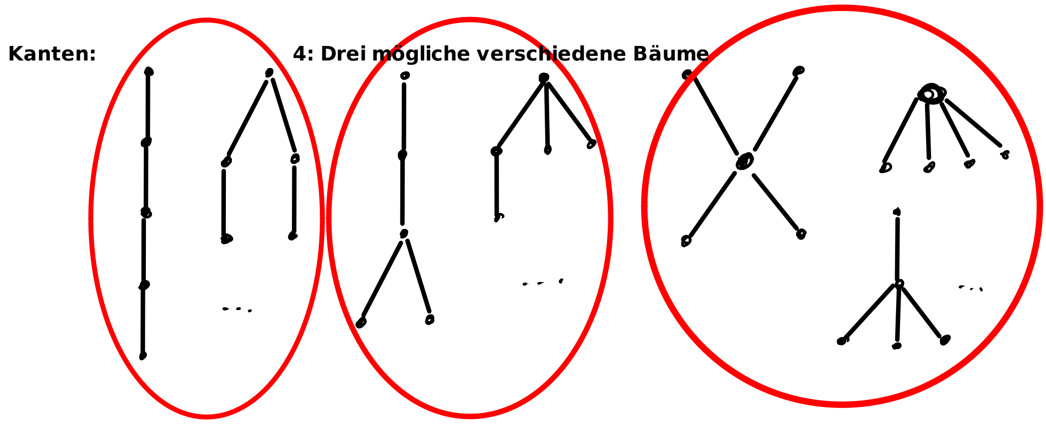


Lösung zu Aufgabe 2 Folgende Strukturen von Bäumen sind möglich mit der Anzahl von Kanten $E = 1, 2, 3, 4$, wobei die Knoten beliebig nummeriert sein können. Weiterhin ist zu beachten, dass die Figuren zusammenhängend sein müssen.



Die rot umkreisten Figuren repräsentieren jeweils den gleichen Baum, obwohl sie auf den ersten Blick unterschiedlich aussehen. Jedoch können die Knoten umhergeschoben werden, sodass sie ineinander überführt werden können.

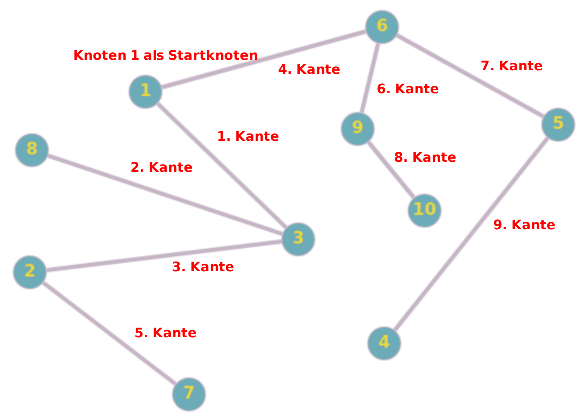
Es kann dabei festgestellt werden, dass die Anzahl Knoten V stets um eins grösser ist als die Anzahl Kanten E. Diese Regel $V - E = 1$ wird im Folgenden dann induktiv bewiesen.



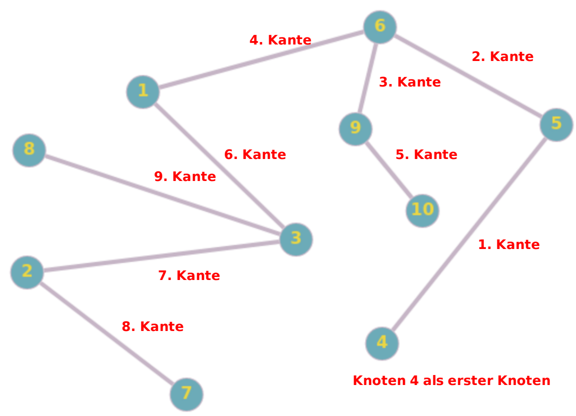
Lösung zu Aufgabe 3 Das induktive Aufbauen des gegebenen Baumes kann in ganz verschiedenen Reihenfolgen geschehen. Folgende Punkte sind aber zu beachten:

- Der Aufbau kann nicht so gemacht werden, dass beim Knoten 1 gestartet werden kann und anschliessend Knoten 2 als zweites eingefügt werden kann. Die Nummerierung der Knoten ist einzig und allein eine Beschriftung der Knoten und sagt nicht notwendigerweise etwas über eine Reihenfolge oder Hierarchie aus.
- Bei jedem Hinzufügen einer neuen Kante muss als Ausgangspunkt ein bestehender Knoten genommen und als Endpunkt ein neuer Knoten hinzugefügt werden, da ein Baum keinen Kreis enthalten darf. Denn beim Verbinden zweier Knoten einer zusammenhängenden Figur gibt es zwingend sofort einen Kreis.

Möglicher Aufbau, startend bei Knoten 1:



Möglicher Aufbau, startend bei Knoten 4:



Somit wird in jedem Schritt durch das Hinzufügen einer neuen Kante, startend bei der vorigen Figur die Anzahl Kanten und Anzahl Knoten um eins erhöht, was durch Abzählen von E und V bestätigt werden kann.

Kanten E	Knoten V
0	1
1	2
2	3
3	4
4	5
5	6
6	7
7	8
8	9
9	10

Lösung für Aufgabe 4 Die Anzahl Knoten V ist stets um eins grösser als die Anzahl Kanten E.

a) $V = 101$.
b) $V = 238$.
c) $V = m + 1$.
d) $V = 125$, da der Baum mit 123 Kanten schon 124 Knoten hatte.
e) $V = E + 2$, da der Baum mit E Kanten schon $E + 1$ Knoten hatte.

Lösung für Aufgabe 5

a) Dies folgt daraus, dass ein Baum frei von Kreisen ist (und nur endlich viele Knoten hat). Im Detail läuft der Beweis über einen Widerspruch: Falls alle Knoten mindestens mit zwei Kanten verbunden wären, so könnten wir folgenden Weg im Baum zurücklegen: Starte bei einem beliebigen Knoten v_0. Von dem aus folgen wir einer beliebigen Kante, um zu einem Knoten v_1 zu gelangen. Da von v_1 mindestens noch eine weitere Kante ausgeht, können wir einer anderen Kante zu einem v_2 folgen mit $v_2 \neq v_0$. Von v_2 aus gibt es dann wiederum eine Kante, die zu einem Knoten $v_3 \neq v_1$ führt. Dies können wir beliebig wiederholen. Somit haben wir einen Weg von v_0 zu v_1 zu v_2 zu v_3 zu ... im Baum. Diese Konstruktion muss aber zwingend dazu führen, dass man irgendwann einen Knoten ein zweites Mal besucht, da nur endlich viele Knoten im Baum enthalten sind. Sobald der Weg aber einen Knoten ein zweites Mal besucht, heisst dies, dass es im Baum einen Kreis gibt, was jedoch nicht sein kann. Somit können nicht alle Knoten mehr als eine abgehende Kante haben. Dadurch gibt es mindestens einen Knoten, der nur eine abgehende Kante hat (null Kanten sind nicht möglich, da sonst die Figur nicht zusammenhängend wäre). Beachte: Man kann weiter auch beweisen, dass jeder Baum mindestens zwei Knoten mit nur einer Kante hat.
b) Es muss sichergestellt sein, dass $F_{\text{reduziert}}$ zusammenhängend ist und die Regel **B** erfüllt, d.h., keinen Kreis enthält.
   - Zu “zusammenhängend”: F_{original} ist ein Baum und somit zusammenhängend. Da wir einen Knoten von F_{original} entfernen, zu welchem nur eine Kante führt, zerfällt die Figur F_{original} bestimmt nicht in zwei Teile, wenn dieser spezielle Knoten entfernt wird. Somit ist auch F_{original} wieder zusammenhängend.
   - Zu “enhält keinen Kreis”: F_{original} besitzt keine Kreise, da es ein Baum ist. Durch Entfernen einer Kante aus dem Baum können aber keine neuen Kreise geschaffen werden.

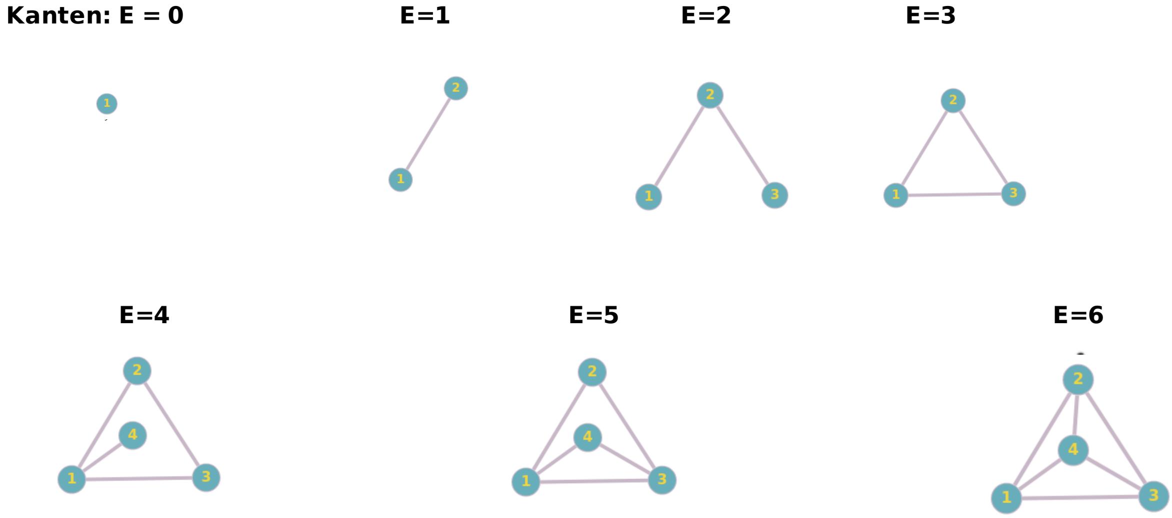
   Somit ist $F_{\text{reduziert}}$ wieder ein Baum.
c) $F_{\text{reduziert}}$ hat eine Kante weniger als F_{original} mit seinen $E = n + 1$ Kanten. Somit hat $F_{\text{reduziert}}$ genau n Kanten, da eine aus F_{original} entfernt wurde.
d) Da $F_{\text{reduziert}}$ nur noch n Kanten hat und für Bäume mit n Kanten schon gezeigt wurde, dass $V - E = 1$ ist, so hat $F_{\text{reduziert}}$ genau $n + 1$ Knoten.
e) Somit muss F_{original} total $n+2$ Knoten haben, da um $F_{\text{reduziert}}$ zu erhalten, ein Knoten aus F_{original} entfernt wurde.
f) Somit gilt für F_{original}, dass $V = n + 2$ und $E = n + 1$ gilt, womit gezeigt ist, dass auch für Bäume mit $n + 1$ Kanten die Formel $V - E = 1$ gilt.
g) Das obige Prozedere des *Induktionsschrittes* kann nun 203’834-mal auf den Baum mit 203’834 angewendet werden, da durch das Entfernen eines Knotens mit einer einzigen Kante stets ein Baum mit je einer Kante und einem Knoten weniger entsteht. Die Argumentationskette lautet also:
   - Die Formel $V - E = 1$ stimmt für einen Baum mit 203’834 Kanten, wenn sie für einen Baum mit 203’833 Kanten stimmt.

- Die Formel $V - E = 1$ stimmt für einen Baum mit 203'833 Kanten, wenn sie für einen Baum mit 203'832 Kanten stimmt.
- Die Formel $V - E = 1$ stimmt für einen Baum mit 203'832 Kanten, wenn sie für einen Baum mit 203'831 Kanten stimmt.
- ...
- Die Formel $V - E = 1$ stimmt für einen Baum mit 2 Kanten, wenn sie für einen Baum mit 1 Kante stimmt.
- Die Formel $V - E = 1$ stimmt für einen Baum mit 1 Kante, wenn sie für einen Baum mit 0 Kanten stimmt. Und diese stimmt gemäss *Induktionsstart*.

Somit stimmt die Formel für einen Baum mit 203'834 Kanten.

Lösung zu Aufgabe 6

a) Die Reihenfolge, in welcher die Kanten hinzugefügt werden, um die Figur G zu erhalten, ist nicht eindeutig. Es ist einzig einzuhalten, dass die neue Kante stets an den schon bestehenden planaren Graphen angehängt wird, damit die Figur zusammenhängend bleibt. Eine mögliche Variante ist:

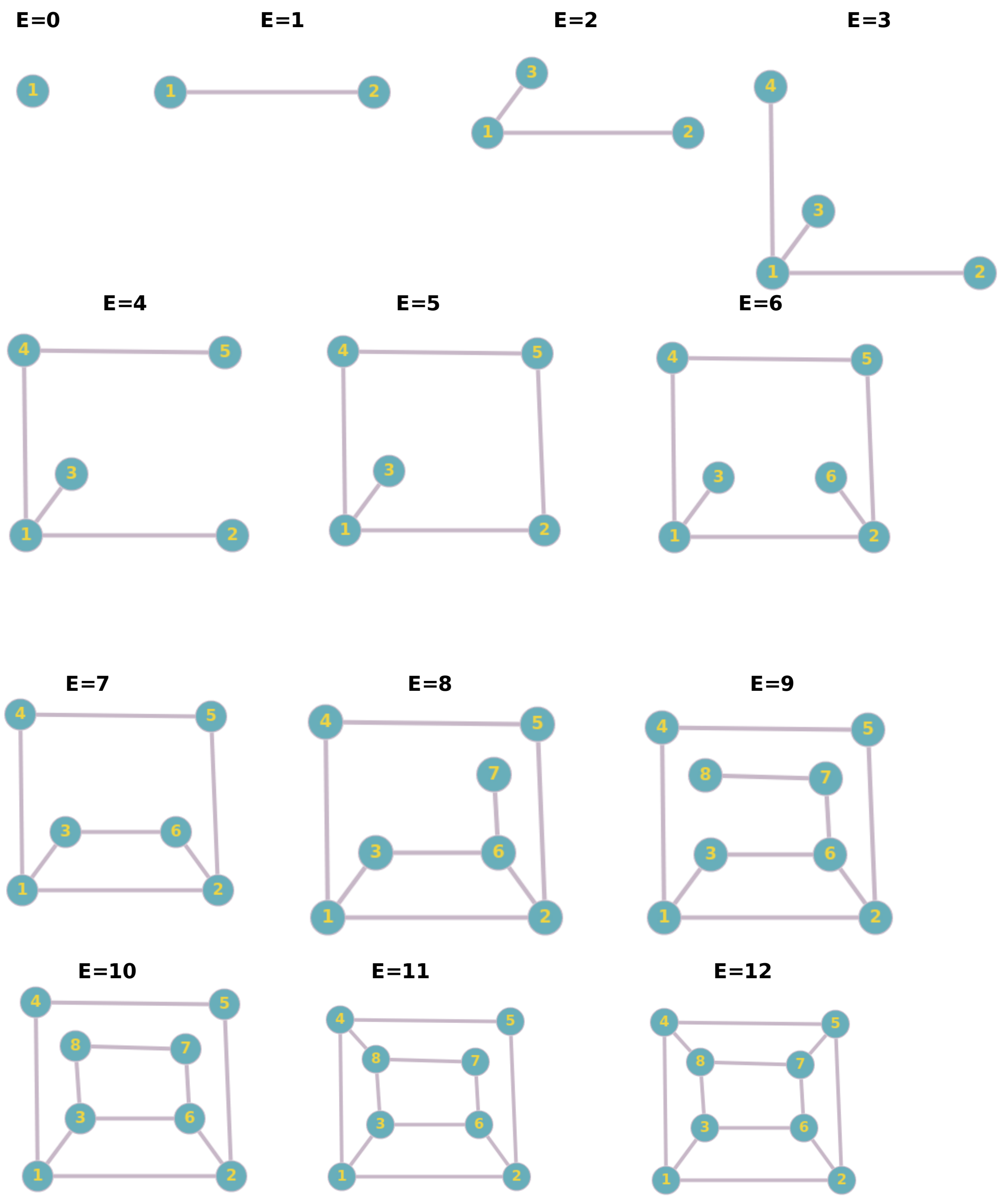


b) Die Buchhaltung über die Anzahl Kanten und Knoten passend zum obigen Entstehungsprozess lautet:

E	0	1	2	3	4	5	6
V	1	2	3	3	4	4	4

Dabei stellt sich heraus, dass die bei den Bäumen gültige Formel $V - E = 1$ nicht mehr gilt. Um zu beobachten, wann diese Bedingung verletzt wird, betrachten wir die Figur H.

c) Wiederum wird für Figur H eine induktive Erzeugung, welche die Knoten ihrer Nummer nach hinzufügt, gezeigt. Dies ist jedoch nicht notwendig.



Die zu dieser Erzeugung passende Buchhaltung lautet (diese hängt von der gewählten induktiven Erzeugung ab):

E	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
V	1	2	3	4	5	5	6	6	7	8	8	8	8

Die Figuren I und J könnten analog untersucht werden.

d) Die Formel $V - E = 1$ gilt ab dem Moment nicht mehr, wo das erste Mal eine Kante zwischen zwei schon bestehenden Knoten des planaren Graphen hinzugefügt wird. Stets in diesen Fällen nimmt zwar die Anzahl der Kanten um eins zu, jedoch die Anzahl von Knoten nicht. Bei Bäumen konnte dieser Fall nicht eintreten, da Kanten zwischen zwei bestehenden Knoten einer zusammenhängenden Figur sofort zu einem Kreis führen, was bei Bäumen nicht erlaubt ist.

e) Die folgenden zwei Fälle gibt es beim induktiven Erstellen von planaren Graphen
- ▶ Fall 1: Ein bestehender Knoten wird über eine neue Kante mit einem neuen Knoten verbunden.
- ▶ Fall 2: Zwei schon bestehende Knoten werden über eine neue Kante verbunden.

Lösung zur Aufgabe 7 Die Anzahl Kanten E, Anzahl Knoten V und Anzahl Gebiete F haben folgende Werte:

Planarer Graph	Kanten E	Knoten V	Gebiete F	Regelmässigkeit ?
G	6	4	4	
H	12	8	6	
I	8	5	5	
J	9	6	5	

Es zeigt sich, dass $V + F$ stets um zwei kleiner ist als E, d.h. $V + F - E = 2$. Oder in Worten: Die Summe der Anzahl Ecken und Gebiete ist um zwei grösser als die Anzahl Ecken.

Lösung zur Aufgabe 8 Die Protokollierung von Teilaufgaben a–c) ergibt folgende Tabelle. Speziell zu beachten ist wiederum die Zählweise der Gebiete: Die unbeschränkte Ebene rund um den ersten Knoten beim planaren Graphen mit $E = 0$ wird ebenfalls mitgezählt.

Kanten E	Knoten V	Gebiete F	Fall 1 oder 2?	Veränderung bei V	Veränderung bei F
0	1	1	-	-	-
1	2	1	Fall 1	+1	0
2	3	1	Fall 1	+1	0
3	3	2	Fall 2	0	+1
4	4	2	Fall 1	+1	0
5	4	3	Fall 2	0	+1
6	4	4	Fall 2	0	+1

Analog kann die Tabelle für den planaren Graphen H erstellt werden. Wiederum hängt diese davon ab, in welcher Reihenfolge die einzelnen Kanten hinzugefügt wurden. Die hier vorgestellte Tabelle ist kompatibel mit der Lösung von Aufgabe 6.

Kanten E	Knoten V	Gebiete F	Fall 1 oder 2?	Veränderung bei V	Veränderung bei F
0	1	1	-	-	-
1	2	1	Fall 1	+1	0
2	3	1	Fall 1	+1	0
3	4	1	Fall 1	+1	0
4	5	1	Fall 1	+1	0
5	5	2	Fall 2	0	+1
6	6	2	Fall 1	+1	0
7	6	3	Fall 2	0	+1
8	7	3	Fall 1	+1	0
9	8	3	Fall 1	+1	0
10	8	4	Fall 2	0	+1
11	8	5	Fall 2	0	+1
12	8	6	Fall 2	0	+1

Somit ist ersichtlich, dass beim Hinzufügen einer neuen Kante im Fall 1 stets die Anzahl Knoten um eins zunimmt (G aber gleich bleibt), hingegen bei Fall 2 stets die Anzahl voneinander abgetrennter Gebiete um eins zunimmt (während V gleich bleibt).

Lösung zur Aufgabe 9 Gemäss der Beobachtungen aus der vorigen Aufgabe gilt:

a) $E = 13, V = 11, F = 4$;
b) $E = 13, V = 10, F = 5$;
c) $E = n + 1, V = m + 1, F = p$;
d) $E = n + 1, V = m, F = p + 1$.

Lösung zur Aufgabe 10

a) *Induktionsstart:* Bei einem Graphen mit $E = 0$ existiert ein Knoten und das unendliche Gebiet der gesamten Ebene, d.h., $V = 1$ und $F = 1$. Somit gilt $V + F - E = 1 + 1 - 0 = 2$, womit die Formel gilt.
b) *Induktionsschritt:* Der Graph G_{original} habe $E = n + 1$ Kanten, V Knoten und F Gebiete.
   i) "Fall 1" rückgängig machen:
      - Dieser Fall kann angewendet werden, wenn es einen derartigen Knoten mit nur einer ausgehenden Kante im Graphen gibt.
      - Durch Entfernen einer Kante kann aus dem planaren Graphen G_{original} keine Figur mit schneidenden Kanten werden. Weiter bleibt die Figur zusammenhängend, da der entfernte Knoten mit keinem anderen verbunden war als über die entfernte Kante.
      - $G_{\text{reduziert}}$ hat n Kanten, $V - 1$ Knoten und F Gebiete.
      - Die Formel "Anzahl Knoten + Anzahl Gebiete - Anzahl Kanten = 2" gilt für $G_{\text{reduziert}}$, da diese gemäss Induktionsschritt schon bis zur Kantenanzahl n gezeigt wurde.
      - Die Anzahl Kanten, Knoten und Gebiete von $G_{\text{reduziert}}$ in die für diese geltende Formel eingesetzt, ergibt

$$\begin{aligned}\text{Anzahl Knoten} + \text{Anzahl Gebiete} - \text{Anzahl Kanten} &= 2\\ (V-1) + F - n &= 2\\ V + F - n &= 3,\end{aligned}$$

      wobei im letzten Schritt auf beiden Seiten der Gleichung +1 gerechnet wurde. Tatsächlich lässt sich daraus herleiten, dass die Formel auch für G_{original} gilt, da überprüft werden muss, ob

$$\text{Anzahl Knoten} + \text{Anzahl Gebiete} - \text{Anzahl Kanten} = 2$$
$$V + F - (n+1) \stackrel{?}{=} 2 \quad \Leftrightarrow \quad V + F - n - 1 \stackrel{?}{=} 2 \quad \Leftrightarrow \quad V + F - n = 3,$$

      was aber gemäss der Formel für $G_{\text{reduziert}}$ tatsächlich gilt.
   ii) Den "Fall 2" rückgängig machen, geht analog vonstatten:
      - Dieser Fall kann angewendet werden, wenn es keine Knoten mehr mit nur einer ausgehenden Kante gibt.
      - Durch Entfernen einer Kante kann aus dem planaren Graphen G_{original} keine Figur mit schneidenden Kanten werden. Gemäss der Lösung von Aufgabe 5 gibt es weiter im Fall, dass alle Knoten mehr als eine ausgehende Kante haben, ganz bestimmt einen Kreis. Somit kann eine Kante aus diesem Kreis entfernt werden, ohne dass die übrig bleibende Figur nicht mehr zusammenhängend ist.

- $G_{\text{reduziert}}$ hat n Kanten, V Knoten und $F-1$ Gebiete.
- Die Formel "Anzahl Knoten + Anzahl Gebiete - Anzahl Kanten = 2" gilt für $G_{\text{reduziert}}$, da diese gemäss Induktionsschritt schon bis zur Kantenanzahl n gezeigt wurde.
- Die Anzahl Kanten, Knoten und Gebiete von $G_{\text{reduziert}}$ in die für diesen Fall geltende Formel eingesetzt, ergibt:

$$\begin{aligned} \text{Anzahl Knoten} + \text{Anzahl Gebiete} - \text{Anzahl Kanten} &= 2 \\ V + (F-1) - n &= 2 \\ V + F - n &= 3, \end{aligned}$$

  wobei im letzten Schritt auf beiden Seiten der Gleichung +1 gerechnet wurde. Somit gilt wieder der gleiche Zusammenhang für V, F und n wie in "Fall 1", womit auch wieder die Gültigkeit der Formel für G_{original} gilt.

Lösung zur Aufgabe 11 Zu zeigen ist die Formel

$$E \leq 3 \cdot V - 6$$

für planare Graphen mit mehr als 3 Knoten.

a) Die Anzahl Kanten eines planaren Graphen ist kleiner gleich als das Dreifache der Anzahl seiner Knoten minus 6.
b) Figur B hat $E = 10$ Kanten und $V = 5$ Knoten. Diese Werte von E und V widersprechen aber der Ungleichung für planare Graphen, da für diese Figur B gilt $3 \cdot V - 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9$, was aber kleiner als $E = 10$ ist. Somit kann Figur B kein planarer Graph sein.
c) Der ausgefüllte Lückentext lautet:
   - Jede einzelne Kante kann jedoch höchstens zum Rand von **zwei** Gebieten gehören.
   - Jedes einzelne Gebiet wird durch mindestens **drei** Kanten umrandet.
   - Zusammengefasst gilt demnach

     $$3 \cdot F \leq 2 \cdot E,$$

     da **sonst zu wenige Kanten da wären, um alle Gebiete zu umranden**. Damit gilt aber auch:

     $$F \leq \mathbf{\frac{2}{3}} \cdot E$$

   - Gemäss Eulerschem Polyedersatz und voriger Ungleichung für F erhalten wir:

     $$2 = V + F - E \leq V + \mathbf{\frac{2}{3}} \cdot E - E = V - \mathbf{\frac{1}{3}} \cdot E$$

   - Wird auf beiden Seiten der Ungleichung plus $\frac{1}{3} \cdot E$ und minus 2 gerechnet, ergibt sich:

     $$\mathbf{\frac{1}{3}} \cdot E \leq V - \mathbf{2}$$

   - Die zu Beginn der Aufgabe postulierte Ungleichung für E ergibt sich nun, wenn man die Ungleichung aus dem letzen Schritt mit **3 auf beiden Seiten multipliziert** .

Lösungen zum Teil "Mittelwerte von Datenströmen"

Lösung zur Aufgabe 12 Die Semesternote wird mit dem arithmetischen Mittel berechnet

$$\overline{x} = \frac{1}{4} \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4),$$

wobei x_1, x_2, x_3, x_4 die Noten der einzelnen Prüfungen sind.

a) Direktes Einsetzen führt zu $\overline{x} = \frac{1}{4} \cdot (4.5 + 3.7 + 5.2 + 5.1) = 4.625$.
b) Es gilt demnach, dass $\frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) = 4.8$. Durch Multiplizieren beider Seiten mit 3 erhält man $x_1 + x_2 + x_3 = 14.4$. Somit kennt man zwar die konkreten Noten x_1, x_2 und x_3 nicht, jedoch ist zur Berechnung des Semesterdurchschnitts nur deren Summe notwendig.

$$\overline{x} = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = \frac{1}{4}(14.4 + x_4) = \frac{1}{4}(14.4 + 4.2) = 4.65$$

c) Wiederum kann die Summe der ersten drei Noten berechnet werden, da $x_1+x_2+x_3 = 3 \cdot 3.1 = 9.3$. Eingesetzt in die Formel für $\overline{x}$ ergibt sich eine Gleichung für x_4 lautend

$$3.8 = \frac{1}{4} \cdot (9.3 + x_4),$$

welche aufgelöst nach x_4 zum notwendigen Wert für die 4. Prüfung $x_4 = 5.9$ führt.
d) Den gewünschten Semesterdurchschnitt und die Note der ersten beiden Prüfungen in die Formel für $\overline{x}$ eingesetzt ergibt

$$5.0 = \frac{1}{4} \cdot (5.3 + 4.2 + x_3 + x_4).$$

Die Multiplikation der Gleichung mit 4 und Subtraktion von 5.3 + 4.2 auf beiden Seiten führt zu

$$x_3 + x_4 = 4 \cdot 5.0 - 5.3 - 4.2 = 10.5,$$

weshalb der Durchschnitt der dritten und vierten Prüfung $\frac{1}{2} \cdot (x_3 + x_4) = \frac{1}{2} \cdot 10.5 = 5.25$ ist.
e) Nehmen wir an, dass die schlechteste Note in der letzten Prüfung geschrieben wurde, d.h. $x_4 = 3.1$. Die Überlegung funktioniert auch analog, wenn es in der ersten, zweiten oder dritten der Fall gewesen wäre. Demnach gilt nun

$$4.6 = \frac{1}{4} \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + 3.1).$$

Mittels Multiplikation der Gleichung mit Faktor 4 und Subtraktion von 3.1 auf beiden Seiten erhält man den Wert der Summe der restlichen drei Noten $x_1 + x_2 + x_3 = 4 \cdot 4.6 - 3.1 = 15.3$, womit der Durchschnitt nach Streichen der schlechtesten Note $\frac{1}{3} \cdot (x_1 + x_2 + x_3) = \frac{1}{3} \cdot 15.3 = 5.1$ ist.

Diese Rechnungen zeigen auf, dass für die Berechnung eines arithmetischen Mittels nicht unbedingt alle einzelnen Datenwerte vorliegen müssen, solange die Summe und die Anzahl der Datenwerte bekannt ist.

Lösung zur Aufgabe 13 Nebst den Noten x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 bezeichnen wir mit w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 die Gewichte der einzelnen Noten. Der Semesterdurchschnitt $\overline{x}_4$ ohne P5 bzw. $\overline{x}_5$ mit P5 berechnet sich dann mittels:

$$\overline{x}_4 = \frac{w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + w_3 \cdot x_3 + w_4 \cdot x_4}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4} \text{ bzw. } \overline{x}_5 = \frac{w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + w_3 \cdot x_3 + w_4 \cdot x_4 + w_5 \cdot x_5}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5}$$

a) Der Semesterdurchschnitt $\overline{x}_4$ nach vier Prüfungen ist

$$\overline{x}_4 = \frac{1 \cdot 5.6 + 0.5 \cdot 4.1 + 0.5 \cdot 5.2 + 1 \cdot 5.9}{1 + 0.5 + 0.5 + 1} = 5.383\ldots$$

b) Wenn wir für die Summe der ersten vier Prüfungen die Bezeichnung $W_4 = w_1 + w_2 + w_3 + w_4$ einführen, gilt $\overline{x}_4 \cdot W_4 = (w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + w_3 \cdot w_3 + w_4 \cdot x_4)$. Das heisst, in diesem konkreten Fall gilt $W_4 = 1 + 0.5 + 0.5 + 1 = 3$ und damit:

$$(w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + w_3 \cdot w_3 + w_4 \cdot x_4) = 4.5 \cdot 3 = 13.5$$

Damit lässt sich der Semesterdurchschnitt inklusive freiwilliger Prüfung P5 berechnen:

$$\overline{x}_5 = \frac{w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + w_3 \cdot x_3 + w_4 \cdot x_4 + w_5 \cdot x_5}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5} = \frac{4.5 + w_5 \cdot x_5}{W_4 + w_5} = \frac{13.5 + 0.5 \cdot 6}{3 + 0.5} = 4.714\ldots$$

Auch beim gewichteten Mittel müssen demnach nicht alle Datenwerte und Gewichte einzeln bekannt sein, um den Durchschnitt nach einer weiteren Prüfung zu berechnen. Es reicht aus, wenn die gewichtete Summe der bisherigen Noten $w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + w_3 \cdot x_3 + w_4 \cdot x_4$ sowie die Summe der bisherigen Gewichte $W_4 = w_1 + w_2 + w_3 + w_4$ bekannt sind.

c) Dies ist nicht möglich, da Person C die Summe W_4 der Gewichte der ersten vier Prüfungen nicht mehr kennt. Der Semesterdurchschnitt ist aber abhängig von W_4, wie in der vorigen Teilaufgabe herausgearbeitet wurde.

Lösung zur Aufgabe 14

a) Zur Berechnung des arithmetischen Mittels von n Datenwerten sind im Zähler stets $n-1$ Additionen und zur Berechnung des Bruches 1 Division notwendig. Somit lautet die ausgefüllte Tabelle:

Anzahl Datenwerte n	1	2	3	4	5	10	73	100	N
Anzahl Operationen	1	2	3	4	5	10	73	100	N

b) Um nacheinander nach jedem Eintreffen eines Datenwertes das Mittel neu zu berechnen, benötigt man gesamthaft

- für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ die Summe $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ Operationen, da $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4, \overline{x}_5$ je einzeln berechnet werden;
- für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ demnach $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ Operationen;
- für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ demanch $1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = 55$ Operationen;
- für $n = 1, 2, 3, 4, \ldots, 100$ demnach $1 + 2 + 3 + \ldots + 100 = 5050$ Operationen;
- für $n = 1, 2, 3, 4, \ldots, N$ demnach gemäss der Gauss'schen Summenformel $1+2+3+\ldots N = \frac{1}{2} \cdot N \cdot (N + 1)$.

Das heisst, dass die Gesamtzahl an Operationen, wenn man bei N Datenwerten nach jedem Eintreffen das neue arithmetische Mittel $\overline{x}_n$ berechnet, quadratisch in Abhängigkeit von N wächst.

Lösung zu Aufgabe 15 Zur Berechnung wird nun stets die Formel

$$\overline{x}_{n+1} = \frac{n \cdot \overline{x}_n + x_{n+1}}{n + 1}$$

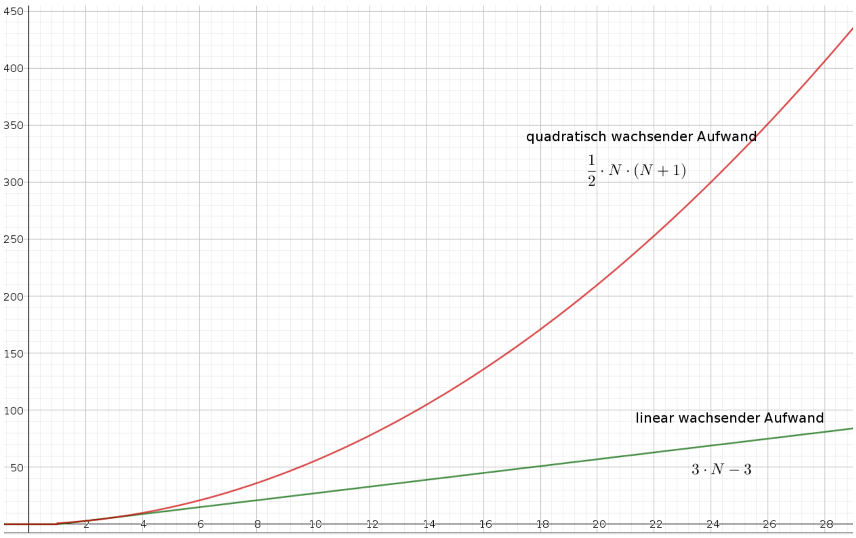
benutzt für $n \geq 1$ und mit $\overline{x}_1 = x_1$.

n	Neuer Datenwert x_n	Rechnung	Durchschnitt $\overline{x}_n$	Anzahl Operationen
1	$x_1 = 2.9$	2.9	2.9	0
2	$x_2 = 4.9$	$(1 \cdot 2.9 + 4.9) : 2$	3.9	3
3	$x_3 = 5.5$	$(2 \cdot 3.9 + 5.5) : 3$	4.43	3
4	$x_4 = 2.8$	$(3 \cdot 4.43 + 2.8) : 4$	4.02	3
5	$x_5 = 0.2$	$(4 \cdot 4.02 + 0.2) : 5$	3.26	3
6	$x_6 = -1.4$	$(5 \cdot 3.26 + (-1.4)) : 6$	2.48	3
7	$x_6 = -0.5$	$(6 \cdot 2.48 + (-0.5)) : 7$	2.05	3

Die Gesamtanzahl von Operationen ist drastisch reduziert, da bei jeder einzelnen Aktualisierung des Durchschnitts nur 3 Grundoperationen durchgeführt werden müssen. Somit fallen

- für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ wegen der 4 Aktualisierungen total $3 + 3 + 3 + 3 = 12$ Operationen an;
- für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ wegen der 5 Aktualisierungen total $5 \cdot 3 = 15$ Operationen an;
- für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ wegen der 9 Aktualisierungen total $9 \cdot 3 = 27$ Operationen an;
- für $n = 1, 2, 3, 4, \ldots, 100$ wegen der 99 Aktualisierungen total $99 \cdot 3 = 297$ Operationen an;
- $n = 1, 2, 3, 4, \ldots, N$ wegen der $N - 1$ Aktualisierungen total $3 \cdot (N - 1) = 3N - 3$ Operationen an.

Somit ist diese Variante, um das arithmetische Mittel bei Datenströmen zu berechnen, klar effizienter, da der Gesamtaufwand nur linear in Bezug auf die Länge des Datenstroms wächst. Dies wird dadurch erreicht, indem das arithmetische Mittel induktiv berechnet wird. Der quadratische Aufwand $\frac{1}{2} \cdot N \cdot (N + 1)$ aus Aufgabe 14 ist grösser und wächst ab $N = 3$ immer schneller, während der lineare Aufwand konstant zunimmt.



Wenn der Datenstrom zum Beispiel $N = 1000$ Datenwerte hat, so sind bei der ursprünglichen Variante $\frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 1001 = 500'500$ Operationen nötig, während bei der induktiven Variante nur $3 \cdot 1000 - 3 = 9'997$ Operationen notwendig sind.

Lösung zur Aufgabe 16

a) Die Formeln für $\overline{x}_4$ und $\overline{x}_5$ lauten:

$$\overline{x}_4 = \frac{w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + w_3 \cdot x_3 + w_4 \cdot x_4}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4}, \qquad \overline{x}_5 = \frac{w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + w_3 \cdot x_3 + w_4 \cdot x_4 + w_5 \cdot x_5}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5}$$

Die gemeinsamen Terme sind orange markiert.

b) Aus der Formel für $\overline{x}_4$ erhält man durch die Benutzung der Bezeichnung $W_4 = w_1 + w_2 + w_3 + w_4$ und der Multiplikation der Gleichung mit W_4 die Gleichung

$$w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + w_3 \cdot x_3 + w_4 \cdot x_4 = W_4 \cdot \overline{x}_4.$$

Dies kann nun in die Formel für $\overline{x}_5$ eingesetzt werden, was dann zur induktiven Formel führt:

$$\overline{x}_5 = \frac{w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + w_3 \cdot x_3 + w_4 \cdot x_4 + w_5 \cdot x_5}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5} = \frac{W_4 \cdot \overline{x}_4 + w_5 \cdot x_5}{W_4 + w_5}$$

c) Mit den analogen Überlegungen folgt auch die Formel für allgemeines n:

$$\overline{x}_{n+1} = \frac{W_n \cdot \overline{x}_n + w_{n+1} \cdot x_{n+1}}{W_n + w_{n+1}}$$