Fachdidaktik Informatik 2

Teil Juraj - Induktion

Ausarbeitung von Thomas Lehmann

6.3.22

1 Naturwissenschaftlicher Einblick in die Induktion

Aus physikalischer Sicht suchte ich einen Zugang über die Modellierung geeignet und fand ihn in der Radioaktivität. Dort hat man es mit enorm grossen Anzahl Kernen zu tun.
Um den Einstieg greifbarer zu machen, breche ich die messbare physikalische Grösse der Aktivität vereinfachend herunter auf die Anzahl Kerne. Dies ist zulässig, da die Aktivität zu einem beliebigen Zeitpunkt stets proportional zur Anzahl Kerne ist, und zwar über die Zerfallswahrscheinlichkeit; es gilt $A_t = \lambda \cdot N_t$. Man hat es mit einer gigantisch grossen Anzahl Kernen zu tun, trotzdem soll hier der Fokus nicht auf der Statistik legen, sondern auf der Modellierung, wie man die Realität abbilden kann.

1.1 Radioaktivität

Für die erste Aufgabe rufe ich Begriffe aus der Kernphysik in Erinnerung, dort modelliert man mit:
N_0 die Anzahl radioaktiver Kerne einer Probe zum Startzeitpunkt (t = 0),
N_t die Anzahl radioaktiver Kerne zum Beobachtungszeitpunkt t,
t die Zeitdauer, die vom Startzeitpunkt bis zum Beobachtungszeitpunkt verstreicht.

Ziel ist es, herauszufinden, wie viele Kerne einer radioaktiven Probe nach einer Zeit noch radioaktiv sind und mit einer Formel zu beschreiben. Zur Überprüfung dient das vierte Kärtchen (Figur 1, Kärtchen ☸).
Die zugrundeliegende Idee dahinter ist, dass wenn man die Anzahl Kerne zu einem Zeitpunkt kennt, mithilfe der Gesetzmässigkeit die Anzahl Kerne zum nächsten Zeitschritt ermitteln kann. Dieses Verfahren kann man dann wiederholen und so den übernächsten Zeitschritt vorhersagen – und dann schliesslich alle.

Feld	❁
Zeit (Jahr)	2000
Radioaktive Kerne	10'000'000
Zerfallende Kerne	1'000'000

Feld	☼
Zeit (Jahr)	2001
Radioaktive Kerne	9'000'000
Zerfallende Kerne	900'000

Feld	❄
Zeit (Jahr)	2002
Radioaktive Kerne	8'100'000
Zerfallende Kerne	810'000

Feld	☸
Zeit (Jahr)	2006
Radioaktive Kerne	5'314'410

Figur 1. Kärtchen zum Ausschneiden

Zunächst werden die dargestellten Plättchen zeitlich geordnet.
Die erste Kachel zeigt 10'000'000 Kerne, auf der man 1'000'000 zerfallende Kerne (10%) entdeckt.
Die zweite Kachel zeigt 9'000'000 verbleibende Kerne, von denen wieder 10% zerfallen (900'000).
Die dritte Kachel weist 8'100'000 Kerne auf, wovon wieder 10% zerfallen (810'000).
Auf der vierten Kachel findet man die Lösung für die Anzahl noch vorhandener Kerne im Jahr 2006.

Hinweis: Immer 1/10 (= 10%) der vorhandenen Kerne zerfällt radioaktiv.
Darum sind im nächsten Zeitschritt die um diese Zahl verminderte Anzahl aufgeführt.

Aufgabe für die Schüler:

a) Finden Sie die Gesetzmässigkeit heraus
b) Sagen Sie voraus, wie viele Kerne im Jahr 2006 noch radioaktiv sind.

Entwicklung (wie es der Schüler entwickeln könnte)
Bei der Betrachtung der Karten kann man vermutend feststellen, dass in jedem Zeitschritt (hier 1 Jahr) die Abnahme proportional zur zum Zeitpunkt t vorhandenen Anzahl (radioaktiver) Kerne ist. Also gilt:

$$N_{t+1} - N_t = p \cdot N_t \qquad \text{(für ein p < 0)}$$

Das bedeutet, dass man die neue Anzahl durch die alte ausdrücken kann (nach einem Zeitschritt):

$$N_{t+1} = N_t\,(1+p)$$

Wir entwickeln ausgehend von einer gegebenen Anzahl (N_0) die Anzahl Kerne nach dem ersten Zeitschritt (N_1). Dann wiederholen wir einsetzend, um das Gesetz erneut anzuwenden.

$$N_1 = N_0 \cdot (1+p)$$

$$N_2 = N_1 \cdot (1+p) = \overbrace{N_0 \cdot (1+p)}^{N_1} \cdot (1+p) = N_0 \cdot (1+p)^2$$

$$N_3 = N_2 \cdot (1+p) = \underbrace{\overbrace{N_0 \cdot (1+p)}^{N_1} \cdot (1+p)}_{N_2} \cdot (1+p) = N_0 \cdot (1+p)^3$$

So erhält man die allgemeine Formel: $N_t = N_0 \cdot (1+p)^t$ (für ein p < 0)

Für unsere gesuchte Voraussage können wir in diesem Modell einsetzen, hier für $p = -0{,}1$ und $t = 6$:

$$N_6 = N_0 \cdot (1+p)^6 = 10'000'000 \cdot (1-0{,}1)^6 = 10'000'000 \cdot (0{,}9)^6 = 5'314'410$$

Unser gefundenes Modell funktioniert also. Allerdings muss dazu die Anfangsbedingung, sprich die Anzahl Kerne (welche über die Aktivität gemessen werden kann) bekannt sein.
Auch ist in unserem Modell zu beachten, dass es nur für grosse Zahlen gilt; denn die Zukunft bzw. den Zerfall eines Kerns ist nicht voraussagbar, sprich hier stösst das Modell an die Grenzen. Damit in diesem Beispiel das Ganze trotz "kleiner" Zahlen funktioniert, müssen die Zahlen noch ganzzahlig sein.

Weitere Aufgaben für die Schüler:

c) In welchem Jahr sind noch 4'782'969 Kerne radioaktiv?
d) In welchem Jahr sind noch 700'000 Kerne radioaktiv?
e) In welchem Jahr waren 5 Milliarden (= $5 \cdot 10^9$) Kerne radioaktiv?
f) In welchem Jahr ist noch genau 1 (ganzer) Kern radioaktiv?

Hinweis zu c) Diese Aufgabe ist mathematisch etwas anspruchsvoller, weil man den Logarithmus braucht. Hier wurden die Zahlen so gewählt, dass eine ganze Zahl resultiert.

Hinweis zu d) Wie bei c), kommt eine rationale Zahl (Bruch) heraus. Bei dieser zusätzlichen Aufgabe kann thematisiert werden, was das physikalisch bedeutet (Messfenster).

Hinweis zu e) Mit dieser Aufgabe soll aufgezeigt werden, dass es einen Startwert braucht. Gleichzeitig erlaubt es unser Modell, "in die Vergangenheit" zu schauen.

Hinweis zu f) Hier stossen wir an die Grenze der gewählten Zahlen. Denn für einen einzelnen Kern ist es (physikalisch bzw. statistisch) unmöglich zu sagen, wann er zerfällt. Das soll zeigen, dass unser Modell nur für eine (sehr) grosse Zahl an Kernen funktioniert.

Lösung zu c) Unser mathematisches Modell $N_t = N_0 \cdot (1+p)^t$ löst man nach t auf und erhält (unter Verwendung der Basistransformation):

$$t = \log_{1+p}\left(\frac{N_t}{N_0}\right) = \frac{ln\left(\frac{N_t}{N_0}\right)}{ln(1+p)} = \frac{ln\left(\frac{4'782'969}{10'000'000}\right)}{ln(0{,}9)} = 7$$

Lösung zu d) Unser mathematisches Modell $N_t = N_0 \cdot (1+p)^t$ löst man nach t auf und erhält (unter Verwendung der Basistransformation):

$$t = \log_{p}\left(\frac{N_t}{N_0}\right) = \frac{ln\left(\frac{N_t}{N_0}\right)}{ln(1+p)} = \frac{ln\left(\frac{700'000}{10'000'000}\right)}{ln(0{,}9)} = 25{,}24$$

Bedeutung der Dezimalstellen: Im Verlaufe des Jahres erreicht, nicht zu Beginn (Messfenster); hier nach fast 25 Jahren und 3 Monaten.

Lösung zu e) Unser mathematisches Modell $N_t = N_0 \cdot (1+p)^t$ löst man nach t auf und erhält (unter Verwendung der Basistransformation):

$$t = \log_{1+p}\left(\frac{N_t}{N_0}\right) = \frac{ln\left(\frac{N_t}{N_0}\right)}{ln(1+p)} = \frac{ln\left(\frac{5'000'000'000}{10'000'000}\right)}{ln(0{,}9)} = -58{,}98 \approx -59$$

Die negative Zahl zeigt die Anzahl Jahre auf <u>vor</u> der "Zeitmessung" und erlaubt quasi einen Blick in die Vergangenheit.
Demnach müsste im Jahr 1963 diese Anzahl Kerne radioaktiv gewesen sein (2022-59).

Lösung zu f) Unser mathematisches Modell $N_t = N_0 \cdot (1+p)^t$ löst man nach t auf und erhält (unter Verwendung der Basistransformation):

$$t = \log_{1+p}\left(\frac{N_t}{N_0}\right) = \frac{ln\left(\frac{N_t}{N_0}\right)}{ln(1+p)} = \frac{ln\left(\frac{1}{10'000'000}\right)}{ln(0{,}9)} = 152{,}98 \approx 153$$

Hier stossen wir an die Grenze der gewählten Zahlen. Denn für einen einzelnen Kern ist es (physikalisch bzw. statistisch) unmöglich, zu sagen, wann er zerfällt. Das soll zeigen, dass unser Modell nur für (gigantisch) viele Kerne funktioniert. Selbst die im veranschaulichenden Rechenbeispiel gewählten grossen Zahlen noch zu klein sind, denn in der Realität wären die Zahlen um Grössenordnungen höher.

1.2 Radioaktivität – Variante 2

In diesem Beispiel will ich mit derselben Idee der induktiven Voraussage einen anderen Aspekt betonen aus der Kernphysik: Die Halbwertszeit, die ich hier wähle, ist diejenige fürs Kohlenstoffisotop 14. Diese Methode wird für die Altersbestimmung organischer Stoffe eingesetzt.
Wie funktioniert die Methode? Bei der Radiokarbonmethode, auch C14-Datierung genannt, wir der relative Anteil des radioaktiven Kohlenstoffisotops 14 zum nicht radioaktiven C12-Nuklid gemessen. Der Bei lebendigen Organismen (wie Pflanzen, …) wird ein konstantes C14/C12-Verhältnis in den Organismus eingebaut, weil dies in der Atmosphäre etwa konstant ist. Nach dem Tod des Organismus wird kein C14 mehr eingebaut und die Anzahl der Kerne dieses Nuklids nimmt wegen des radioaktiven Zerfalls exponentiell ab. So kann mit dem relativen Anteil und der Halbwertszeit von 5'730 Jahren ein Alter der Probe ermittelt werden zwischen rund 300 und 60'000 Jahren – was sich also hervorragend eignet für archäologische Untersuchungen. Das C14 ist ein Betastrahler und zerfällt unter Aussendung eines Elektrons (Beta-Minus-Strahlung) und eines Antineutrinos zu Stickstoff (N14). In der Umwelt beziehungsweise Atmosphäre ist das Verhältnis allerdings nicht perfekt konstant, sondern unterliegt auch zeitlichen Schwankungen, worauf hier eben so wenig wie auf die Abweichung bei der Halbwertszeit eingegangen werden soll. Um eine auswertbare Probe zu erhalten, muss zunächst das organische Material zu reinem Kohlenstoff reduziert werden, was in entsprechenden Laboratorien (wie beispielsweise an der ETH) gelingt.

Feld	
Jahr	heute
Radioaktive Kerne	10'000'000

Feld	
Jahr	heute + 5'730 a
Radioaktive Kerne	5'000'000
Zerfallende Kerne	900'000

Feld	
Jahr	heute + 11'460 a
Radioaktive Kerne	2'500'000
Zerfallende Kerne	1'250'000

Feld	
Zeit (Jahr)	heute + 28'650 a
Radioaktive Kerne	312'500

Figur 2. Kärtchen zum Ausschneiden

Zunächst werden die als Visualisierung der Kerne dargestellten Platten zeitlich geordnet.
Die erste Kachel zeigt 10'000'000 Kerne, auf man 5'000'000 zerfallende Kerne (50%) entdeckt.
Die zweite Kachel zeigt 2'500'000 Kerne, von denen wieder 50% zerfallen in den nächsten 5'730 Jahren
Die dritte Kachel weist 1'250'000 Kerne auf, wovon erneut 50% zerfallen.
Auf der vierten Kachel findet man die Lösung für die Anzahl radioaktiver Kerne nach 5 Halbwertszeiten.

Hinweis: Immer die Hälfte (= 50%) der vorhandenen Kerne zerfällt radioaktiv.
Darum sind im nächsten Zeitschritt die um diese Zahl verminderte Anzahl aufgeführt.

Aufgabe für die Schüler

a) Finden Sie die Gesetzmässigkeit heraus.
b) Sagen Sie voraus, wie viele Kerne nach 28'650 Jahren noch radioaktiv sind.

Entwicklung

Bei der Betrachtung der Karten kann man feststellen, dass alle 5'730 Jahre die Anzahl radioaktiver Kerne um die Hälfte gesunken ist – dieser besonderen Zeitspanne sagt man Halbwertszeit.
Die Entwicklung folgt also in Vielfachen der Halbwertszeiten (κ):

$$N_{\kappa+1} - N_\kappa = \frac{1}{2} \cdot N_\kappa$$

Das bedeutet, dass man die neue Anzahl durch die alte ausdrücken kann (nach einem Zeitschritt):

$$N_{\kappa+1} = N_\kappa \cdot \frac{1}{2}$$

Wir entwickeln ausgehend von einer gegebenen Anzahl (N_0) die Anzahl Kerne nach dem ersten Zeitschritt (N_1). Dann wiederholen wir einsetzend, um das Gesetz erneut anzuwenden.

$$N_1 = N_0 \cdot \frac{1}{2}$$

$$N_2 = N_1 \cdot \frac{1}{2} = \overbrace{N_0 \cdot \frac{1}{2}}^{N_1} \cdot \frac{1}{2} = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$N_3 = N_2 \cdot \frac{1}{2} = \underbrace{\overbrace{N_0 \cdot \frac{1}{2}}^{N_1} \cdot \frac{1}{2}}_{N_2} \cdot \frac{1}{2} = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

Man erhält die allgemeine Formel: $N_t = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^\kappa$ mit κ als Vielfaches ("Paket") der Halbwertszeit T,

was man ausdrücken kann mit $\kappa = \frac{t}{T}$, weil $t = \kappa \cdot T$, was sofort nachvollzogen werden kann.

Für eine beliebige Zeitspanne t kann man demnach schreiben: $N_t = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$

Für unsere Voraussage für die Anzahl noch radioaktiver Kerne in 28'650 Jahren können wir in diesem Modell einsetzen; im vorherigen Modell würde p = -0,5 und j = 5 (nach 5 Halbwertszeiten) gelten.

$$N_6 = N_0 \cdot (1+p)^5 = 10'000'000 \cdot (1-0{,}5)^5 = 10'000'000 \cdot (0{,}5)^5 = 312'500$$

Unser gefundenes Modell liefert eine gute Abbildung. Allerdings muss dazu die Anfangsbedingung, sprich die Anzahl Kerne (welche über die Aktivität gemessen werden kann), bekannt sein. Auch ist an diesem Modell zu beachten, dass es nur für grosse Zahlen gilt; denn die Zukunft bzw. den Zerfall eines Kerns ist nicht voraussagbar, sprich hier stösst das Modell an die Grenzen. Damit in diesem Beispiel das Ganze trotz "kleiner" Zahlen funktioniert, sollen die gewählten Zahlen ganzzahlig sein.

Weitere Aufgaben für die Schüler

c) Nach wie vielen Zeitschritten (κ) (der Halbwertszeit) sind noch 78'125 Kerne radioaktiv?
d) In welchem Jahr sind noch 700'000 Kerne radioaktiv?
e) Wie viele Jahre vor heute waren 40 Millionen (= $40 \cdot 10^6$) Kerne radioaktiv?

Hinweis zu c) Diese Aufgabe ist mathematisch etwas anspruchsvoller, weil man den Logarithmus braucht. Hier wurden die Zahlen so gewählt, dass eine ganze Zahl resultiert für die Vielfache der Halbwertszeit.
Die Aufgabe ist so gewählt, dass man auf ein kleines Verhältnis von N_t zu N_0 kommt und so die Grenze der Nachweisbarkeit diskutieren kann.

Hinweis zu d) Wie bei c), jedoch kommt eine rationale Zahl (Bruch) heraus. Hier erhält man ein nicht ganzzahliges Vielfaches der Halbwertszeit.

Hinweis zu e) Mit dieser Aufgabe soll aufgezeigt werden, dass es einen Startwert braucht und man die aktuelle Zahl misst. Unser Modell erlaubt so, "in die Vergangenheit" zu schauen. Das heisst, wir können mithilfe des Verhältnisses auch das Alter einer (organischen) Probe herausfinden – dies wird in der Realität auch angewandt für Datierungen. Übrigens gibt es neben der C14-Datierung weitere Radionuklide, die zur Altersbestimmung genutzt werden können, beispielsweise Kalium-40 bei Gesteinen.

Lösungen

Lösung zu c) Unser mathematisches Modell $N_t = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\kappa}$ löst man nach t auf und erhält (unter Verwendung der Basistransformation):

$$\kappa = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{N_t}{N_0}\right) = \frac{ln\left(\frac{N_t}{N_0}\right)}{ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{ln\left(\frac{78'125}{10'000'000}\right)}{-ln(2)} = 7$$

Das sind also 7 "Pakete" der Halbwertszeit (à 5'730 a). Demnach in 40'110 Jahren.

Auf dieselbe Lösung kommt man, wenn man das Modell $N_t = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ nimmt und die Halbwertszeit von 5'730 Jahren einsetzt:

$$t = T \cdot \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{N_t}{N_0}\right) = T \cdot \frac{ln\left(\frac{N_t}{N_0}\right)}{ln\left(\frac{1}{2}\right)} = T \cdot \frac{ln\left(\frac{78'125}{10'000'000}\right)}{-ln(2)} = 7 \cdot T$$

$$= 7 \cdot 5'730\ a = 40'110\ a$$

Hinweis: Bei etwa 10 Halbwertszeiten wird es unmöglich, das Alter genau zu bestimmen, weil dann das Verhältnis zu klein wird.

Lösung zu d) Unser mathematisches Modell $N_t = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ löst man nach t auf und erhält

$$t = T \cdot \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{N_t}{N_0}\right) = T \cdot \frac{ln\left(\frac{N_t}{N_0}\right)}{ln\left(\frac{1}{2}\right)} = T \cdot \frac{ln\left(\frac{700'00}{10'000'000}\right)}{-ln(2)}$$

$$t = 3{,}84 \cdot T = 7 \cdot 5'730\ a = 29'983\ a \approx 30'000\ a$$

Das sind also 3,84 "Pakete" der Halbwertszeit (à 5'730 a), das sind ca. 30'000 Jahre.

Lösung zu e) Unser mathematisches Modell $N_t = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ löst man nach t auf und erhält:

$$t = T \cdot \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{N_t}{N_0}\right) = T \cdot \frac{ln\left(\frac{N_t}{N_0}\right)}{ln\left(\frac{1}{2}\right)} = T \cdot \frac{ln\left(\frac{40'000'000}{10'000'000}\right)}{-ln(2)}$$

$$t = -2 \cdot T = -2 \cdot 5'730\ a = -11'460\ a$$

Die negative Zahl zeigt auf, vor wie vielen Jahren vor heute die Zahl der Kerne so hoch war: Das war vor 11'460 Jahren – was auch leicht im Kopf gerechnet werden kann. Das müsste also etwa vor -11'460 + 2022 = -9'438 Jahren gewesen sein, in Europa begann kurz zuvor die Mittelsteinzeit.

1.3 Kaninchen

In der obigen Betrachtung wurde im Modell zwar schrittweise gezeigt, wie die Entwicklung verläuft. Um jedoch die Verankerung (zu Beginn) und den (induktiven) Schluss deutlicher aufzuzeigen, möchte ich mithilfe eines leicht verständlichen Beispiels aus der Biologie aufwarten. Dabei können spannende Hintergründe entdeckt werden.

Eine Modellierung von Kaninchen, das auf den grossen Mathematiker Leonardo da Pisa (auch Fibonacci) (1170 - 1250) zurückgeht, beruht auf folgenden Grundannahmen:

1.) Zu Beginn existiert ein reproduktives Kaninchenpaar.
2.) Ab dem zweiten Monat gebärt dieses Kaninchenpaar jeweils ein weiteres reproduktives Paar.
3.) Alle Kaninchenpaare leben ewig, überleben also alle Vorgängergenerationen.

Entsprechend lässt sich die Entwicklung folgendermassen veranschaulichen: 1, 1, 2, 3, 5, …
Dem geübten Betrachter springt die (weltbekannte) Fibonacci-Folge direkt ins Auge.
Das Modell startet für fortschreitende Zeit t (t ϵ ℕ) und N für die Anzahl der Kaninchenpaare mit

$$N_0 = 1$$
$$N_1 = 1$$

Die Anzahl Kaninchen der neuen Generation setzt sich aus der aktuellen und der vorherigen zusammen:

$$N_{t+1} = N_t + N_{t-1}$$

Zur Lösung der Gleichung setzt man beispielsweise $N_x = \alpha^x$

$$N_{t+1} = N_t + N_{t-1}$$
$$\alpha^{t+1} = \alpha^t + \alpha^{t-1}$$

Das führt auf die Gleichung

$$\alpha^2 = \alpha + 1$$

was äquivalent ist zur quadratischen Gleichung $0 = \alpha^2 - \alpha - 1$.
Diese hat die beiden folgenden zwei Lösungen:

$$\alpha_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Als Problem erhalten wir, dass weder $N_t = \alpha_1^t$ noch $N_t = \alpha_1^t$ erfüllt $N_1 = 1$.
Zur Lösung betrachten wir daher $N_t = a \cdot \alpha_1^t + b \cdot \alpha_2^t$ mit zwei a,b ϵ ℝ
Die Anfangsbedingungen $N_0 = 1$ und $N_1 = 1$ bestimmen die a und b

$a + b = 1$ und $1 = a \cdot \alpha_1^1 + b \cdot \alpha_2^1$

also $b = 1 - a$ und $1 = a \cdot \alpha_1^1 + (1 - a) \cdot \alpha_2^1$

daher $a = \frac{1-\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{1 - \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}}{\frac{2\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$

und $b = 1 - a = 1 - \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$

Das liefert die Formel von Binet (eines französischen Mathematikers, 1786-1856):

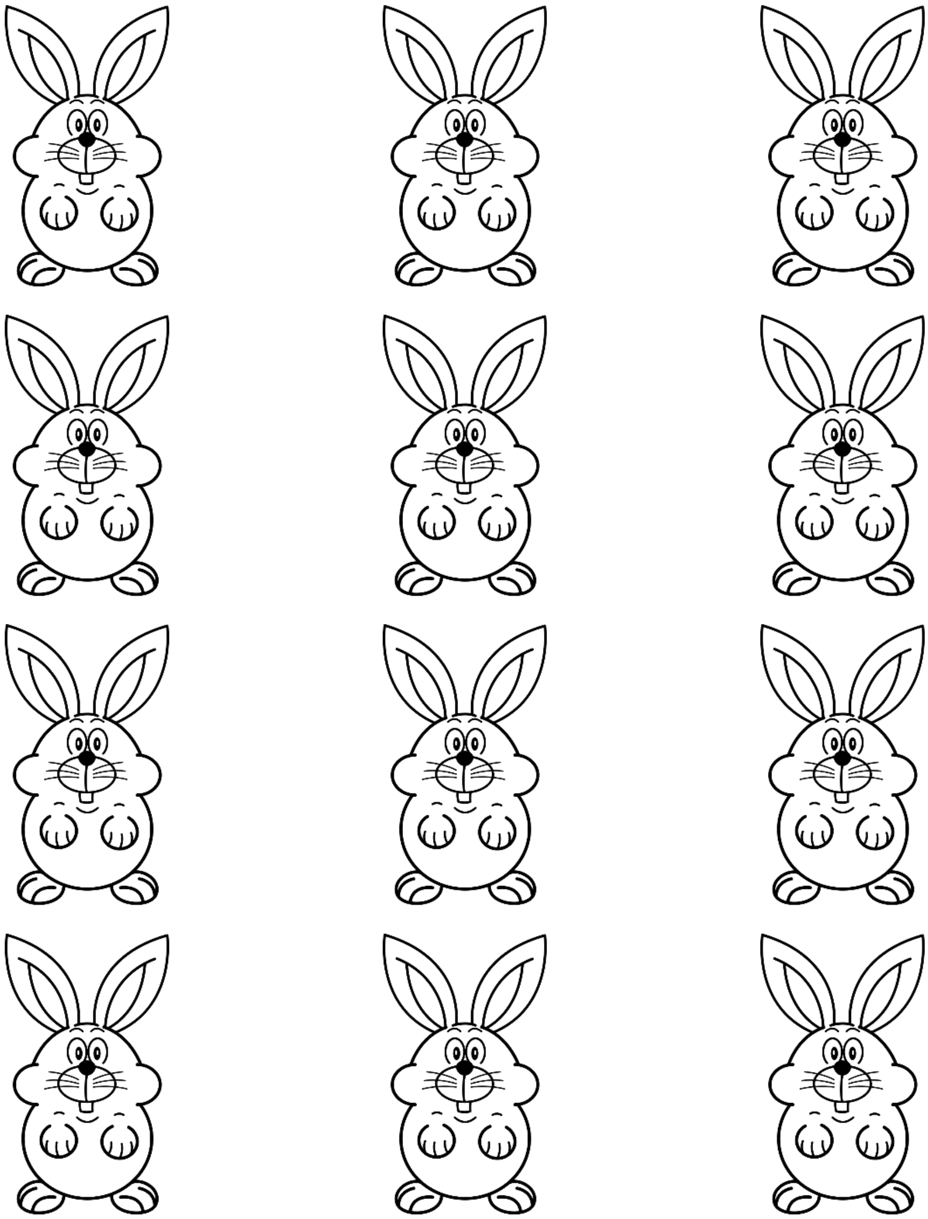
$$N_t = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)^t + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)^t$$

Modellkritik

Die Population wächst unbegrenzt. Die Reproduktion erfolgt zu deterministischen Zeitpunkten und die Anzahl der Nachkommen ist ebenfalls deterministisch. Sterben wird nicht berücksichtigt. Die Nachkommen sind nur bedingt durch Pärchen abbildbar. Für eine gewisse Phase ist aber das Modell sehr gut geeignet. Um jedoch mehr als diese (Wachstums-) Phase abzubilden, müssten differenziertere Modelle angeschaut werden

Damit haben wir zwei Modelle angeschaut: Beim ersten (wenn man die $p>0$ wählt für ein Wachstum) stösst man auf eine Rekursion 1. Ordnung (da man zur Berechnung des nächsten Zeitschritts nur den vorangehenden kennen muss), während man beim zweiten Beispiel zwei vorangehende kennen muss, weshalb man von zweiter Ordnung spricht.

Eine didaktische Idee wäre, den Schülern diese Kaninchen in Papierform zur Verfügung zu stellen

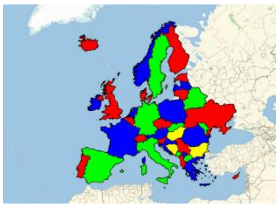


Figur 3: Vorlage zum Drucken und Ausschneiden

Quelle vom 6.3.22: `https://prints.ultracoloringpages.com/875ce1c214680d7cd2958056e3544c28.png`

1.4 Kreise

Mittels Induktion soll gezeigt werden, dass es möglich ist, beliebig viele Kreise mit lediglich zwei Farben auszumalen – analog zum Vierfarbenproblem bei Karten.



Figur 4. Länder in Europa mit 4 Farben, www.wolfram.com vom 6.3.22 (Link).

Figur 5. Zwei sich schneidende Kreise, die mit nur zwei Farben eingefärbte wurden.

Für n = 0 gibt es nur eine Region: die ganze Ebene. Daher braucht man sicher nicht mehr als 2 Farben.

Unsere Induktionshypothese laute: Jedes Arrangement von n Kreisen kann man mit zwei Farben ausfüllen. Das brauchen wir, um zu zeigen, dass die Behauptung auch für n+1 Kreise standhält.

Wir haben einige 2-farbige Flächen mit n Kreisen, so dass keine benachbarten Regionen gleichfarbig sind. Wie können wir diese Eigenschaft aufrechterhalten, wenn wir einen zusätzlichen Kreis einfügen. Zunächst zeichnete ich Diagramme, was aber die Gefahr barg, zu überzeugen, dass ich auch restlos alle Fälle abdeckte, weil so viele verschiedene Wege existieren, mit der sich n Kreise schneiden können. So entschied ich mich für einen algorithmischeren Weg, der hoffentlich zum Ziel führt.
Wir haben n Kreise, die die Ebene in eine Anzahl Regionen aufteilen. Die Grenze einer dieser Regionen besteht aus Bögen – Teilen von existierenden Kreisen. Jeder Bogen liegt zwischen zwei Regionen. Ein Bogen werde als "gültig" bezeichnet, wenn er die beiden Regionen, die er trennt, verschiedene Farben haben, uns als ungültig, wenn sie gleichfarbig sind. Gemäss Induktionshypothese sind alle Bögen gültig, wenn wir n Kreise haben.
Angenommen, wir fügen einen n+1-ten Kreis K hinzu, ohne eine Farbe zu ändern. Welche Bögen werden dadurch ungültig? Die alten Kreise (Teile der n alten Kreise) bleiben gültig, solange die durch sie geteilten Regionen gleichbleiben (d.h. verschiedenfarbig). Aber jeder neue Bogen entlang des Umfangs von K ist ungültig, weil er eine alte Region einer einzigen Farbe teilt, und deshalb beide neuen Regionen trennt, die jedoch gleicher Farbe sind.
Daher ergibt sich ein Algorithmus: Tausche die Farben jeder Region innerhalb K. Das macht alle ungültigen Umfänge von K gültig. Derweil bleibt jeder alte Bogen ausserhalb K gültig, weil die Regionen, die er trennt, unangetastet bleiben, und jeder Bogen innerhalb von K bleibt gültig, denn die beiden getrennten Regionen wechseln (jeweils) ihre Farbe. Alle ungültigen Bögen werden gültig und alle gültigen Bögen bleiben gültig. Nach dieser Operation sind alle Bögen gültig und folglich weisen keine benachbarten Regionen dieselbe Farbe auf.

Mit folgendem Punkt möchte ich noch einen Fall aufzeigen, der zu Irritationen führen kann: Zwei Kreise, die sich in einem einzigen Punkt berühren, müssen die gleiche Farbe tragen, denn jeder von ihnen ist ausserhalb des "Hintergrunds". Zwei Regionen sind nämlich nur genau dann Nachbarn, wenn sie eine gemeinsame Grenze (mit einer von Null verschiedenen Länge) aufweisen. Zu beachten gilt es, dass ein Punkt keine Länge hat. Demnach ist es auch in Ordnung, dass die beiden Kreise dieselbe Farbe tragen.

2 Unterrichtssequenz: Einführung der Induktion

Voraussetzungen, die die Klasse mitbringt:

Meine Ausarbeitung soll für eine Klasse am Gymnasium sein, die keinen naturwissenschaftlichen Schwerpunkt gewählt hat, beispielsweise für eine Wirtschaftsklasse. Sie verfügt über gefestigte Algebrakenntnisse, insbesondere seien die binomischen Formeln bekannt. Die Technik der Induktion soll gänzlich unbekannt sein.

Meine Sequenz soll sich in drei Abschnitte aufgliedern.

Die Einführung gestalte ich mit einer kleinen Vorführung anhand eines leicht nachvollziehbaren Beispiels. Ich gebe eine Vorschrift zur Berechnung einer Zahl und behaupte, dass eine bestimmte Zahl ein Teiler ist von ihr. Ich möchte mit der Teilbarkeit arbeiten, weil mir unter anderem im Sinne der Informatik aus algorithmischen Gründen wertvoll erscheint.

Nach der Vorführung sollen die Schüler:innen die neu gezeigt bekommene Technik selbst durchführen. Zuerst sollen sie einen Beweis führen und dann einen Gegenbeweis. So sollen Sie mit der Technik der vollständigen Induktion vertraut werden und Selbstvertrauen aufbauen.

Im nächsten Schritt soll die Summenformel "kleiner Gauss" entwickelt und bewiesen werden.

Zum Schluss soll ein kleines Spiel warten, die Türme von Hanoi. Ein kleiner Wettbewerb in kleinen, pädagogisch geschickt zusammengesetzten Gruppen soll die Klasse animieren.

Vorführung

Beispiel: $n^2 + n$ ist gerade, das heisst ist durch 2 teilbar

Schritt 1 (Verankerung)
Überprüfung für n = 1: Ist 2 ein Teiler von $1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$? $\rightarrow ja, stimmt$

Schritt 2 (Voraussetzung)
Wir nehmen an, 2 ist ein Teiler von $n^2 + n$.

Schritt 3: (Vererbung)
Die 2 muss auch Teiler sein von $(n+1)^2 + (n+1)$

Schritt 4: (Beweis)

Die 2 muss auch Teiler sein von dem um 1 erhöhten n (hier in der Klammer):

$$\underbrace{(n+1)\,(n+1)} + (n+1)$$

$$= \overbrace{n^2 + 2n + 1} + (n+1)$$

$$= (n^2 + n) + (2n + 2)$$

$$= (n^2 + n) + 2(n + 1)$$

Dass der erste Term $(n^2 + n)$ durch 2 teilbar ist, haben wir schon gezeigt. Demnach müssen wir das noch für den zweiten Summanden nachweisen. Erreichen müssen wir daher, dass ein Faktor 2 entsteht für die Abhängigkeit von n. Das lässt sich hier durch Ausklammern schön beweisen.

Aufgabe 1a: Weisen Sie nach, dass 3 immer ein Teiler ist von $n^3 - n$.

Lösung 1a: Schritt 1 (Verankerung)
Gilt für $n = 1$ die Behauptung, dass 3 ein Teiler ist von $3^3 - 3 = 9 - 3 = 6 \rightarrow ja$

Schritt 2 (Voraussetzung)
Wir nehmen an, 3 ist ein Teiler von $n^3 - n$.

Schritt 3: (Vererbung)
Die 3 muss auch Teiler sein von $(n+1)^3 - (n+1)$

Schritt 4: (Beweis)
Die 3 muss auch Teiler sein von $(n+1)\,(n+1)\,(n+1) - (n+1)$

$$= n^3 + 3n^2 + 3n - n - 1$$
$$= (n^3 - n) + (3n^2 + 3n)$$
$$= (n^3 - n) + 3(n^2 + n)$$

Dass der erste Term $(n^3 - n)$ durch 3 teilbar ist, haben wir schon gezeigt. Demnach müssen wir noch nachweisen, dass es auch der zweite Term $3(n^2 + n)$ ist. Weil 3 als Faktor erscheint für die nur von n abhängige Klammer, können wir dies sauber nachweisen und den Beweis erbringen, dass 3 stets ein Teiler ist.

Aufgabe 1b 3 ist immer ein Teiler von $n^3 + n$

Hinweis Die Aufgabe ist leicht abgewandelt zur vorherigen und erlaubt einen Widerspruchsbeweis.

Lösung 1b Schritt 1 (Verankerung)
Gilt für $n = 1$ die Behauptung, dass 3 ein Teiler ist von $3^3 + 3 = 9 + 3 = 12 \rightarrow ja$

Schritt 2 (Voraussetzung)
Wir nehmen an, 3 ist ein Teiler von $n^3 + n$.

Schritt 3: (Vererbung)
Die 3 muss auch Teiler sein von $(n+1)^3 + (n+1)$

Schritt 4: (Beweis)
Die 3 muss auch Teiler sein von $(n+1)\,(n+1)\,(n+1) + (n+1)$

$$= n^3 + 3n^2 + 3n + n + 1$$
$$= (n^3 + n) + (3n^2 + 3n + 1)$$
$$= (n^3 + n) + 3(n^2 + n) + 1$$

Dass der erste Term $(n^3 + n)$ durch 3 teilbar ist, haben wir schon gezeigt. Demnach müssen wir noch nachweisen, dass es auch der zweite Term $3(n^2 + n) + 1$ ist. Zwar erscheint die gewünschte 3 als Faktor, jedoch nicht für den ganzen Term. Das führt zu einem Widerspruch und hat zur Folge, dass der Nachweis nicht erbracht werden kann.

Aufgabe 2 Die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n.

a) Berechnen Sie zuerst die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis 10 durch einfache Addition.

b) Stellen Sie eine Tabelle auf mit drei Spalten, in der ersten Spalte notieren Sie die Zahlen von 1 bis 10 aufsteigend, in der zweiten absteigend. Bilden Sie dann die Summe jeder Zeile.
Erkennen Sie ein Muster?
Falls nicht, addieren Sie alle zeilenweise erhaltenen Summen und suchen Sie nach Paaren.

c) Wie lautet die Formel für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen?

d) Beweisen Sie die gefundene Formel mit vollständiger Induktion!

Lösung 2a 55

Lösung 2b: Tabelle für n = 10:

Zahl	invers	Summe
1	10	11
2	9	11
3	8	11
4	7	11
5	6	11
6	5	11
7	4	11
8	3	11
9	2	11
10	1	11
Summe		110

Lösung 2c $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$

Lösung 2d $n=1$: $\frac{n\cdot(n+1)}{2} = \frac{1\cdot(1+1)}{2} = 2$ stimmt

Daher beschreibt $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n.

Zu zeigen ist $\frac{(n+1)\cdot\left((n+1)+1\right)}{2} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$

Beweis $1+2+\cdots+n+(n+1) = \underbrace{1+2+\cdots+n}_{\frac{n\cdot(n+1)}{2}} + (n+1)$

$$= \frac{n\cdot(n+1)}{2} + \frac{n+1}{2} = \frac{n\cdot(n+1)+(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$$

q.e.d.

Aufgabe 3: Die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen.

a) Berechnen Sie zuerst die Summe der ersten fünf ungeraden natürlichen Zahlen (von 1 bis 9).

b) Stellen Sie eine Tabelle auf mit drei Spalten, in der ersten Spalte notieren Sie die Zahlen aufsteigend, in der zweiten absteigend. Bilden Sie dann die Summe jeder Zeile.
Erkennen Sie ein Muster?
Falls nicht, addieren Sie alle zeilenweise erhaltenen Summen und suchen Sie nach Paaren.

c) Wie lautet die Formel für die Summe der ersten n natürlichen ungeraden Zahlen?

d) Beweisen Sie die gefundene Formel mittels vollständiger Induktion!

Lösung 3a 25

Lösung 3b: Tabelle für n = 5:

Zahl	invers	Zeilen-summe	Summe der ungeraden Z.	n^2	n
1	9	10	1	1^2	1
3	7	10	4	2^2	2
5	5	10	9	3^2	3
7	3	10	16	4^2	4
9	1	10	25	5^2	5
25	25	50	-	-	-

allgemein

Zahl	invers	Summe	Anzahl
1	(2n-1)	2n	n-mal
3	(2n-3)	2n	
5	(2n-5)	2n	
…	…	2n	
(2n-1)	+1	2n	
		$\frac{n \cdot 2n}{2} = n^2$	

Lösung 3c n^2

Lösung 3d n = 1 $n^2 = 1^2 = 1$ stimmt

Daher beschreibt n^2 die Summe aller natürlichen ungeraden Zahlen von 1 bis n.

Zu zeigen ist $1 + 3 + \cdots + (2n-1)^2 = n^2$

Beweis $1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2(n+1)-1) = (n+1)^2$

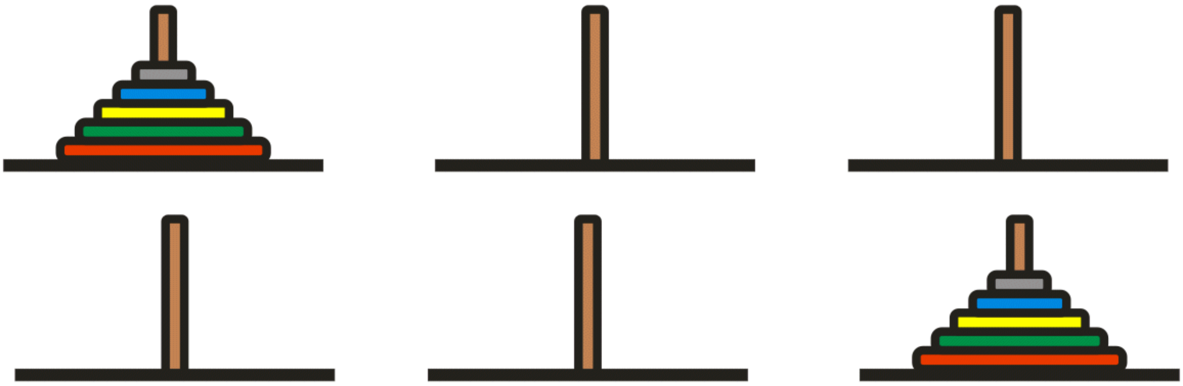
$$\underbrace{1 + 3 + \cdots + (2n-1)}_{n^2} + (2(n+1)-1) = (n+1)^2$$

$$= n^2 + 2n + 2 - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

q.e.d.

Aufgabe 4 Türme von Hanoi

Der französische Mathematiker Edouard Lucas erfand folgendes Spiel. Es besteht aus drei Nadeln und vielen Scheiben, die immer grösser werden im Durchmesser. Anfangs befindet sich eine nach oben verjüngende Pyramide auf der linken Nadel (Figur 6). Nun sollen alle Scheiben auf die rechte Nadel umplatziert werden. Folgende Regeln gilt es dabei zu beachten:
Erstens darf pro Zug nur eine einzelne Scheibe aufs Mal verschoben werden.
Zweitens darf niemals eine grössere Scheibe auf einer kleineren liegen.



Figur 6. Veranschaulichung des Spiels mit dem Anfangszustand (links) und dem Endzustand (rechts)

a) Wer findet in der Gruppe zuerst heraus, wie viele Züge mindestens nötig sind bei n Scheiben? Überlegt werden darf auf Papier und wer interaktiv bzw. online spielen will, darf das Mobiltelefon zücken. Auf der Webseite `https://www.mathematik.ch/spiele/hanoi_mit_grafik` kann das Spiel mit drei bis zehn Scheiben interaktiv online gespielt werden. Die Anzahl Züge wird mitgezählt. Eine Stoppuhr kann bei Bedarf eingeschaltet werden. Ein Reset-Knopf stellt die Ausgangssituation leicht wieder her.
Sollte die Möglichkeit bestehen, wäre es natürlich genial, wenn die Türme in Natura bereitstehen, um etwas in den Händen zu haben beim Spielen.

b) Beweisen Sie Ihre Behauptung mittels vollständiger Induktion in Ihrer "Forschungsgruppe"!

Die Aufteilung der Klasse in "Forschungsgruppen" zu je 3-4 Personen fände ich sinnvoll, damit ein Wettbewerb entsteht, sowohl innerhalb der Gruppe als zwischen den Forschungsgruppen.

Anschlüsse:
- Dauer ermitteln: Pro Zug 1 Sekunde annehmen und mit dem Alter des Universums (13,8 Mrd. Jahre) vergleichen.
- Rekursion
- Algorithmen
- Komplexität
- das Spiel programmieren, eventuell mit vorbereiteten Codesequenzen
- erweiterbar mit vielen Aufgaben, unter anderem zur Teilbarkeit, zu Summen, …

Lösung 4 Minimale Anzahl Züge für wenige Scheiben:

Scheiben	Züge
1	1
2	2
3	7
n	$2^n - 1$

Um n Scheiben von einem Stapel zum anderen zu transportieren, sind $2^n - 1$ Züge nötig.
Das ist offensichtlich, weil man einfach die Scheibe direkt zur gewünschten Nadel bewegt.

Anfang:
Um 1 Scheibe von einem Stapel zum anderen zu transportieren, sind $2^1 - 1 = 1$ Zug nötig

Voraussetzung
Um n Scheiben von einem Stapel zum anderen zu transportieren, sind $2^n - 1$ Züge nötig.

Induktionsschritt (Vererbung)
Um n+1 Scheiben von einem Stapel zum anderen zu transportieren, sind $2^{n+1} - 1$ Züge nötig.

Beweis

a) Schiebe n Scheiben von der "Anfangsnadel" auf die "Hilfsnadel".
b) Schiebe die Scheibe n+1 direkt von der Anfangsnadel auf die Zielnadel.
c) Schiebe n Scheiben von der Hilfsnadel auf die Zielnadel

$$\underbrace{2^n - 1}_{a)} + \underbrace{1}_{b)} + \underbrace{2^n}_{c)} = \underbrace{2^n + 2^n} - 1 + \underbrace{1 - 1}_{0} = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1 \qquad \text{wzbw.}$$

Eine Veranschaulichung mit den Zwischenschritten für vier Scheiben: