Das Rucksackproblem

Planung der Unterrichtseinheit

Übersicht

Die Lernenden sollen sich in dieser Unterrichtseinheit mit dem sogenannten Rucksackproblem auseinandersetzen. Dabei sollen sie einerseits die allgemeine Problemstellung kennen lernen, andererseits aber auch Lösungsalgorithmen entwickeln. Dazu werden verschiedene Versionen des Rucksackproblems, welche sich durch unterschiedliche Einschränkungen auszeichnen, betrachtet. Die Lernenden sollen für jede Version einen Lösungsalgorithmus finden/kennenlernen. Dabei sollen sie einerseits sehen, dass leichte Veränderungen der Problemstellung dazu führen können, dass ein Lösungsalgorithmus nicht mehr funktioniert, andererseits aber auch feststellen, dass äusserst komplexe Probleme sehr einfach sein können, wenn man bestimmte Einschränkungen macht.

Vorkenntnisse

- Die Lernenden können bei einer gegebenen Problemstellung systematisch alle möglichen Lösungen aufschreiben.
- Die Lernenden wissen, was ein Optimierungsproblem ist.
- Die Lernenden können beurteilen, ob eine gegebene Lösung für eine konkrete Problemstellung optimal ist.
- Die Lernenden wissen, was ein Algorithmus ist.
- Die Lernenden können konkrete Algorithmen selbständig formulieren.
- Die Lernenden kennen den Begriff "dynamische Programmierung".
- Die Lernenden haben schon Beispiele zur dynamischen Programmierung gelöst.

Lernziele

- Die Lernenden wissen, was das sogenannte Rucksackproblem ist.
- Die Lernenden können Algorithmen in Worten allgemein formulieren.
- Die Lernenden sehen, dass Lösungsalgorithmen oft nur für bestimmte Spezialfälle effizient sind.
- Die Lernenden verstehen, dass eine leichte Veränderung der Problemstellung zu grossen Änderungen bezüglich der möglichen Lösungsalgorithmen führen kann.
- Die Lernenden wissen, dass es Probleme gibt, welche algorithmisch nicht effizient lösbar sind.
- Die Lernenden können mit Hilfe von dynamischer Programmierung (von Hand) ein gegebenes Rucksackproblem lösen.
- Die Lernenden erkennen, das das Rucksackproblem auch mit Hilfe der dynamischen Programmierung nicht effizient lösbar ist.

Dauer

2-3 Lektionen

Bemerkung

Je nach Klasse und Stufe könnten die verschiedenen Szenarien auch im Rahmen eines Gruppenpuzzles bearbeitet werden. Da dabei jede Gruppe eines der Szenarien bearbeitet und die Resultate anschliessend den anderen Gruppen präsentiert, fehlt in diesem Fall allerdings die individuelle vertiefte Auseinandersetzung mit den unterschiedlichen Problemstellungen.

Arbeitsblatt 1

PROLOG

Wieder einmal ist es Indiana Jones gelungen, einen längst vergessenen Schatz zu finden. Nachdem er sich mühsam durch enge Felsspalten gezwungen hat, steile Wände erklommen hat und sich über schier unendlichen Abgründen abgeseilt hat, steht er vor dem glänzenden Schatz eines versunkenen Königreichs. Vom Gold geblendet kann er sein Glück kaum fassen und stolpert benommen vorwärts. Dabei löst er blöderweise einen aus alter Zeit stammenden Mechanismus aus und die gesamte Höhle beginnt sich mit Wasser zu füllen. Jetzt gilt es schnell zu handeln! Sobald der Schatz unter Wasser ist, wird er für immer verloren sein. Daher möchte Indiana Jones die wertvollsten Stücke retten. Leider kann sein Rucksack maximal 15 kg tragen. Bei einem grösseren Gewicht reisst der Rucksack. Es ist auch nicht möglich, dass er einen Teil der Beute in den Händen trägt, da er beide Hände braucht, um aus der Höhle klettern zu können.

SZENARIO 1: Bei dem Schatz handelt es sich um Münzen aus Kupfer. Je schwerer eine Münze ist, desto grösser ist ihr sie Wert (siehe die Auflistung unten).

AUFGABE 1

a) Formuliere eine möglichst optimale Strategie für das Packen des Rucksacks.
b) Was stellst du fest? Wie könnte dein Algorithmus gegebenenfalls verbessert werden? Diskutiere deine Lösung mit deinen Klassenkameradinnen und Klassenkameraden.

	Münze 1	Münze 2	Münze 3	Münze 4	Münze 5	Münze 6	Münze 7	Münze 8	Münze 9
Gewicht	1 kg	2 kg	3 kg	5 kg	10 kg	6 kg	4 kg	12 kg	9 kg
Wert	1.-	2.-	3.-	5.-	10.-	6.-	4.-	12.-	9.-

Tabelle 1

AUFGABE 2

Indiana Jones möchte gerne einen Lösungsalgorithmus finden, welcher für jede Probleminstanz eine optimale Lösung liefert. Er formuliert daher die untenstehenden Algorithmen.
Suche für jeden Algorithmus eine Probleminstanz, bei welcher nicht die optimale berechnet wird. Versuche dabei jeweils eine Probleminstanz zu finden, bei der die gefundene Lösung viel schlechter als die optimale Lösung ist.

Algorithmus 1: Möglichst wertvolle Objekte wählen

Wähle jeweils den wertvollsten Gegenstand, welcher noch in den Rucksack gelegt werden kann, und lege diesen in den Rucksack. Wiederhole das so lange, bis kein Gegenstand mehr in den Rucksack gelegt werden kann.

Algorithmus 2: Möglichst viele Objekte wählen

Wähle jeweils den leichtesten möglichen Gegenstand aus und lege diesen in den Rucksack. Wiederhole das so lange, bis kein Gegenstand mehr in den Rucksack gelegt werden kann.

Algorithmus 3: Eine gute Mischung

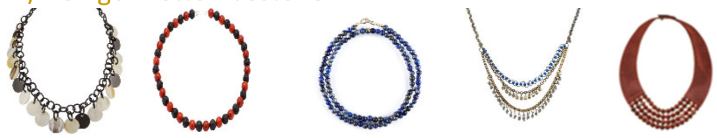
Wähle abwechslungsweise den wertvollsten und den leichtesten möglichen Gegenstand aus und lege diesen in den Rucksack. Wiederhole das so lange, bis kein Gegenstand mehr in den Rucksack gelegt werden kann.

SZENARIO 2: Bei dem Schatz handelt es sich um Halsketten. Jede ist genau einmal vorhanden. Jede hat ein anderes Gewicht und einen anderen Wert (siehe das Beispiel unten). Die Halsketten können nicht zerteilt werden.

AUFGABE 3

a) Finde für jeden Algorithmus aus der letzten Aufgabe eine Probleminstanz, bei welcher der Algorithmus nicht die optimale Lösung liefert.
b) Finde für jeden Algorithmus aus der letzten Aufgabe eine Probleminstanz, bei welcher der Algorithmus eine Lösung liefert, welche 100-mal schlechter ist als die optimale Lösung.

Es folgt ein Beispiel für mögliche Gewichte/Werte: Die zu bestimmenden Probleminstanzen dürfen auch aus mehr/weniger Ketten bestehen.



	Kette 1	Kette 2	Kette 3	Kette 4	Kette 5
Gewicht	2 kg	1 kg	3 kg	3 kg	5 kg
Wert	100.-	1.-	81.-	90.-	50.-

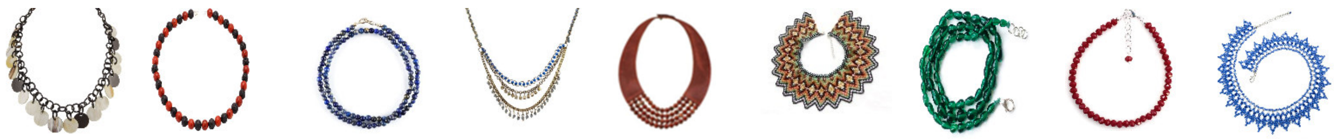
Tabelle 2

SZENARIO 3: Bei dem Schatz handelt es sich um Halsketten. Jede Halskette ist genau einmal vorhanden. Jede hat ein anderes Gewicht und einen anderen Wert (siehe die Auflistung unten). Allerdings ist es möglich, die Kette zu öffnen und nur einen Teil der Perlen mitzunehmen.

AUFGABE 4

a) Wie muss Indiana Jones vorgehen, um seinen Rucksack möglichst optimal zu packen? Formuliere einen Algorithmus, welcher für jede Probleminstanz garantiert die optimale Lösung findet, und wende diesen auf die untenstehende Probleminstanz an.
b) Formuliere diesen Algorithmus so genau, dass alle den Algorithmus ausführen können und damit eine optimale Lösung finden können.
c) Begründe, weshalb der Algorithmus für jede Probleminstanz eine optimale Lösung findet.

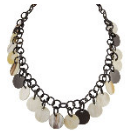
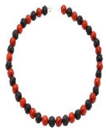
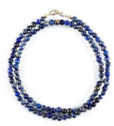
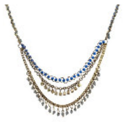
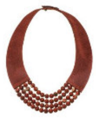
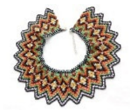
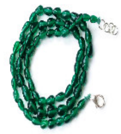
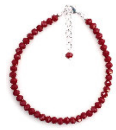
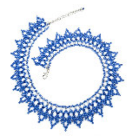
Probleminstanz 1



	Kette 1	Kette 2	Kette 3	Kette 4	Kette 5	Kette 6	Kette 7	Kette 8	Kette 9
Gewicht	2 kg	1 kg	3 kg	3 kg	5 kg	9 kg	6 kg	2 kg	8 kg
Wert	100.-	1.-	81.-	90.-	50.-	135.-	90.-	90.-	100.-

Tabelle 3

Probleminstanz 2

	Kette 1	Kette 2	Kette 3	Kette 4	Kette 5	Kette 6	Kette 7	Kette 8	Kette 9
Gewicht	2 kg	1 kg	4 kg	3 kg	5 kg	9 kg	6 kg	2 kg	8 kg
Wert	100.-	1.-	80.-	60.-	50.-	200.-	90.-	90.-	100.-

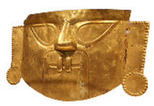
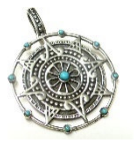
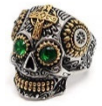
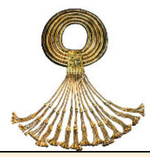
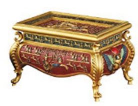
Tabelle 4

SZENARIO 4: Bei dem Schatz handelt es sich um verschiede Artefakte. Jedes ist nur einmal vorhanden. Jedes hat ein anderes Gewicht und einen anderen Wert (siehe die Auflistung unten). Es ist nicht möglich, die Artefakte zu zerteilen. Wie sollte Indiana Jones vorgehen, um seinen Rucksack möglichst optimal zu packen?

AUFGABE 5

a) Wie muss Indiana Jones vorgehen, um seinen Rucksack möglichst optimal zu packen? Überlege dir mögliche Algorithmen und teste sie an der untenstehenden Probleminstanz.
b) Was stellst du fest? Wie könnten deine Algorithmen gegebenenfalls verbessert werden? Diskutiere deine Überlegungen mit deinen Klassenkameradinnen und Klassenkameraden.
c) Auf wie viele Arten kann der Rucksack maximal gepackt werden? Schreibe alle Möglichkeiten auf.

Probleminstanz 1

	Objekt 1	Objekt 2	Objekt 3	Objekt 4	Objekt 5
Gewicht	7 kg	1 kg	7 kg	6 kg	9 kg
Wert	63.-	13.-	175.-	60.-	180.-

Tabelle 5

Arbeitsblatt 2

Wie wir im letzten Arbeitsblatt gesehen haben, ist es gar nicht so einfach, eine optimale Lösung zu finden, wenn man die Gegenstände nicht teilen darf. Eine Möglichkeit wäre, alle möglichen Lösungskandidaten aufzuschreiben und aus denjenigen, welche nicht schwerer als 15 kg sind, die mit dem grössten Wert zu wählen.

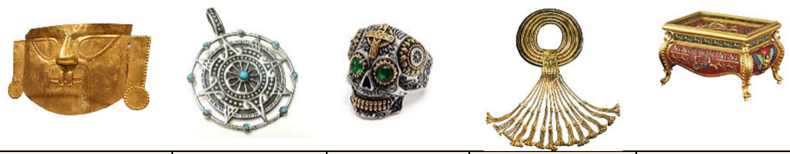
Aufgabe 6

a) Berechne in der untenstehenden Tabelle jeweils die Anzahl möglicher Lösungskandidaten. Wie gehst du dabei vor?
b) Angenommen ein Computer kann pro Sekunde von 1'000 Lösungskandidaten jeweils den Gesamtwert und das Gesamtgewicht berechnen. Wie lange bräuchte er, um die in der untenstehenden Tabelle angegebenen Probleminstanzen zu lösen? Halte deine Ergebnisse in der untenstehenden Tabelle fest.

Anzahl Objekte	1	5	10	20	50
Anzahl Kombinationen					
Benötigte Zeit					

Tabelle 6

Wie man sieht, führen schon relativ wenige Objekte dazu, dass die benötigte Rechenzeit sehr gross wird. Daher stellt sich die Frage, ob es nicht einen effizienteren Algorithmus gibt, welcher für jede Probleminstanz eine optimale Lösung liefert. Dazu soll nochmals die Probleminstanz aus dem Szenario 4 betrachtet werden.



Objekt 1	Objekt 2	Objekt 3	Objekt 4	Objekt 5
7 kg	1 kg	7 kg	6 kg	9 kg
63.-	13.-	175.-	60.-	180.-

Tabelle 7

Aus dem Unterricht kennst du schon das Prinzip der dynamischen Programmierung. Bei dieser wird ein grosses Problem in geeignete Teilprobleme aufgeteilt. Da zudem wichtige Zwischenresultate systematisch gespeichert werden, müssen nicht mehr alle möglichen Lösungskandidaten aufgeschrieben und ausgewertet werden, um eine optimale Lösung berechnen zu können.
Dieses Prinzip soll nun auf die Probleminstanz aus Szenario 4 angewendet werden.

Das Problem, die Objekte möglichst optimal in einen Rucksack mit einer maximalen Kapazität von 15 kg zu packen, wird in folgende Teilprobleme aufgeteilt:

- Packe die Objekte möglichst optimal in einen Rucksack mit einer Kapazität von 0 kg.
- Packe die Objekte möglichst optimal in einen Rucksack mit einer Kapazität von 1 kg.
- Packe die Objekte möglichst optimal in einen Rucksack mit einer Kapazität von 2 kg.

… und so weiter, bis…

- Packe die Objekte möglichst optimal in einen Rucksack mit einer Kapazität von 14 kg.
- Packe die Objekte möglichst optimal in einen Rucksack mit einer Kapazität von 15 kg.

Es werden also alle möglichen ganzzahligen Kapazitäten des Rucksacks zwischen 0 kg und 15 kg betrachtet und für jede davon wird die optimale Packstrategie berechnet.

Um die jeweiligen Ergebnisse zu speichern, erstellen wir eine Tabelle.

Diese sieht (noch nicht ausgefüllte) Tabelle sieht folgendermassen aus:

Kapazität Rucksack in kg			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Objekt	Gewicht	Wert	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
O 1	7 kg	63 Fr.																
O 2	1 kg	13 Fr.																
O 3	7 kg	175 Fr.																
O 4	6 kg	60 Fr.																
O 5	9 kg	180 Fr.																

Tabelle 8

Die Zahlen in den hellgelben Feldern entsprechen der Rucksackkapazität. In die weissen Felder wird jeweils der Gesamtwert aller Gegenstände im Rucksack geschrieben.

Nun beginnen wir mit dem Ausfüllen der Tabelle. Dazu wird zunächst das Objekt O 1 betrachtet. Wenn die maximale Kapazität des Rucksacks 0 kg ist, kann das Objekt 1 nicht eingepackt werden. Daher wird in dieses Feld eine 0 geschrieben. Dies gilt auch für die Kapazitäten 1kg bis 6 kg. Beträgt die Kapazität des Rucksacks 7 kg, so kann O1 eingepackt werden. Der Gesamtwert würde nun 63 Fr. betragen. Daher schreibt man in dieses Feld 63. Für alle weiteren Kapazitäten bleibt der Wert derselbe, daher wird auch in diese Felder jeweils 63 eingetragen.

Kapazität Rucksack in kg			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Objekt	Gewicht	Wert	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
O 1	7 kg	63 Fr.	0	0	0	0	0	0	0	63	63	63	63	63	63	63	63	63
O 2	1 kg	13 Fr.	0	13	13	13	13	13	13	63	76	76	76	76	76	76	76	76
O 3	7 kg	175 Fr.	0	13	13	13	13	13	13	175	188							
O 4	6 kg	60 Fr.	0	13	13	13	13	13	60	175								
O 5	9 kg	180 Fr.	0	13	13	13	13	13	60									

Tabelle 9

Als Nächstes wird das Objekt O2 betrachtet. Bei jedem Feld muss nun überprüft werden, ob der Gesamtwert bei der entsprechenden Kapazität grösser ist, wenn das Objekt gewählt wird oder nicht.

Schauen wir uns das an ein paar Beispielen an:
Betrachte das grün markierte Feld. Es wird das Objekt 2 und die Kapazität 6 betrachtet. Aus den bisher ausgefüllten Feldern wissen wir, dass bei einer Kapazität von 6 der Maximalwert 0.- beträgt.
Nun gibt es zwei Optionen: Entweder wird das Objekt 2 hinzugefügt oder nicht.
Falls das Objekt 2 hinzugefügt wird, so ist die Kapazität noch 6 kg-1 kg=5 kg. Der Maximalwert ist somit der Maximalwert der Kapazität 5 plus den Wert von Objekt 4, also: 0.- + 13.- = 13.-.

Falls das Objekt 4 nicht hinzugefügt wird, bleibt der Maximalwert bei 0.-.
Da der Maximalwert bei der ersten Option grösser ist, wird in das grüne Feld 13 eingetragen.
Betrachte das orange markierte Feld. Es wird das Objekt 2 und Kapazität 7 betrachtet. Aus den bisher ausgefüllten Feldern wissen wir, dass bei einer Kapazität von 7 der Maximalwert 63.- beträgt.
Nun gibt es zwei Optionen: Entweder wird das Objekt 2 hinzugefügt oder nicht.
Falls das Objekt 2 hinzugefügt wird, beträgt die Kapazität 7 kg - 7 kg= 0kg. Der Maximalwert ist somit der Maximalwert der Kapazität 0 plus den Wert von Objekt 2, also: 0.- + 13.- = 13.-.

Falls das Objekt 2 nicht hinzugefügt wird, bleibt der Maximalwert bei 63.-.
Da der Maximalwert bei der zweiten Option grösser ist, wird in das orange Feld 63 eingetragen.

Betrachte das hellblau markierte Feld. Es wird das Objekt 2 und die Kapazität 8 betrachtet. Aus den bisher gefüllten Feldern wissen wird, dass bei einer Kapazität von 8 der Maximalwert 63.- beträgt. Nun gibt es zwei Optionen: Entweder wird das Objekt 2 hinzugefügt oder nicht.
Falls das Objekt 2 hinzugefügt wird, hat der Rucksack noch eine Kapazität von 8 kg -7 kg= 1kg. Der Maximalwert ist somit der Maximalwert der Kapazität 1 plus den Wert von Objekt 2, also:
63.- + 13.- = 76.-.
Falls das Objekt 2 nicht hinzugefügt wird, bleibt der Maximalwert bei 63.-.
Da der Maximalwert bei der ersten Option grösser ist, wird in das hellblaue Feld 63 eingetragen.

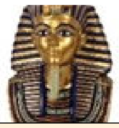
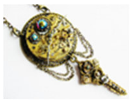
Wie man sieht, wird in jeder Zeile ein neues Objekt betrachtet. Es wird für jede Rucksackkapazität berechnet, ob der Gesamtwert grösser ist, wenn dieses Objekt in den Rucksack gepackt wird, oder nicht.

Aufgabe 7:

a) Vervollständige die Tabelle und bestimme den maximalen Wert, welcher in den Rucksack gepackt werden kann.
b) Der grösste Wert der Tabelle entspricht somit dem maximalen Wert, welcher in den Rucksack gepackt werden kann. Doch wie kommt man nun von diesem maximalen Wert auf die gewählten Objekte? Versuche eine passende Strategie zu finden. Diskutiere deine Ideen mit deinen Klassenkameradinnen und Klassenkameraden.
c) Ist dieser Algorithmus immer effizient? Wo könnten mögliche Probleme liegen?

Szenario 5

Bei dem Schatz handelt es sich um verschiede Artefakte. Jedes ist nur einmal vorhanden. Jedes hat ein anderes Gewicht und einen anderen Wert (siehe die Auflistung unten). Es ist nicht möglich, die Artefakte zu zerteilen. Wie sollte Indiana Jones vorgehen, um seinen Rucksack möglichst optimal zu packen?


Objekt 1	Objekt 2	Objekt 3
10 kg	8 kg	4 kg
90.-	70.-	80.-

Tabelle 10

Aufgabe 8:

a) Bestimme die optimale Lösung dieser Probleminstanz, indem du den vorgestellten Algorithmus verwendest.
b) Bestimme die optimale Lösung dieser Probleminstanz, indem du alle möglichen Optionen systematisch aufschreibst.
c) Was stellst du fest?

Arbeitsblatt 3

In den Arbeitsblättern 1 und 2 wurden verschiedene Varianten des sogenannten Rucksackproblems betrachtet. Das Rucksackproblem ist eines der klassischen Probleme der Informatik.
Allgemein lässt es sich folgendermassen formulieren:

Rucksackproblem
Gegeben ist eine Menge an Objekten, welche je ein Gewicht und einen Wert haben. Bestimme, welche Objekte ausgewählt werden müssen, damit das Gesamtgewicht kleiner als oder gleich gross wie ein bestimmtes Limit ist und der Wert maximiert wird.

In der realen Welt lassen sich viele Probleme auf das Rucksackproblem zurückführen. Angenommen eine Firma hat sehr viele Aufträge, aber zu wenig Zeit, um alle zu erledigen. Die Objekte wären in diesem Fall die Aufträge, das Gewicht ist die Zeit, welche man zum Erledigen der Aufträge braucht und der Wert ist der Gewinn, welchen man mit dem Erledigen es Auftrages erzielt.
Eine andere Anwendung besteht zum Beispiel im Bereich der Software-Entwicklung. Die zur Verfügung stehende Rechenkapazität ist beschränkt und es muss entschieden werden, welche Operationen ausgeführt werden sollen.

AUFGABE 1: Überlege dir weitere reale Probleme, welche sich auf das Rucksackproblem zurückführen lassen.

Je nachdem welche Anwendung modelliert werden soll, lässt sich das Rucksackproblem einschränken. Das konnte in den verschiedenen Szenarien beobachtet werden. Bei einigen dieser Teilprobleme lassen sich effiziente Algorithmen finden, welche immer eine optimale Lösung liefern (z.B. in Szenario 2). In den meisten Fällen lässt sich eine optimale Lösung allerdings nur dann finden, wenn alle möglichen Kombinationen ausprobiert werden. Dies führt zu einem exponentiellen Aufwand und ist daher alles andere als effizient.

Der in Arbeitsblatt 2 vorgestellte Algorithmus basiert auf dynamischer Programmierung. Wenn alle Gewichte rational sind, liefert der Algorithmus immer eine optimale Lösung. Allerdings konnte in Szenario 5 gesehen werden, dass der Algorithmus nicht immer der effizienteste ist.

AUFGABE 2:

a) Was ist das Problem bei diesem Algorithmus, wenn die Gewichte rational, aber nicht ganzzahlig sind?
b) Warum funktioniert der Algorithmus nicht, wenn die Gewichte nicht rational sind?
c) Warum ist der Algorithmus auch bei ganzzahligen Gewichten nicht immer der effizienteste?

Erkenntnis
Für das allgemeine Rucksackproblem existiert kein Algorithmus, welcher für jede Probleminstanz effizient eine optimale Lösung findet.

Was auf den ersten Blick frustrierend erscheinen mag, ist allerdings nicht so schlimm. In der Praxis ist es nämlich häufiger wichtig, möglichst schnell eine gute Lösung zu finden als eine optimale. Es werden daher oft Algorithmen verwendet, welche mit einer möglichst hohen Wahrscheinlichkeit schnell eine gute Lösung finden. Auf diese Algorithmen soll aber an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden.

EPILOG

Indiana Jones gelingt es rechtzeitig, seinen Rucksack zu füllen und rechtzeitig aus der Höhle zu klettern. Ob er tatsächlich die wertvollsten Stücke gerettet hat, kann er leider nicht beurteilen. Aber er ist mit seiner Beute sehr zufrieden. Er freut sich schon auf sein nächstes Abenteuer und beschliesst, nächstes Mal einen grösseren Rucksack mitzunehmen.

Lösungen

Arbeitsblatt 1

Prolog

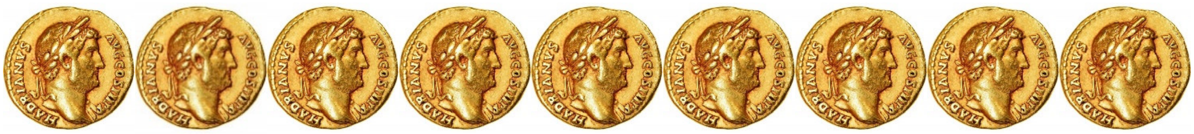
Wieder einmal ist es Indiana Jones gelungen, einen längst vergessenen Schatz zu finden. Nachdem er sich mühsam durch enge Felsspalten gezwungen hat, steile Wände erklommen hat und sich über schier unendlichen Abgründen abgeseilt hat, steht er vor dem glänzenden Schatz eines versunkenen Königreichs. Vom Gold geblendet kann er sein Glück kaum fassen und stolpert benommen vorwärts. Dabei löst er blöderweise einen aus alter Zeit stammenden Mechanismus aus und die gesamte Höhle beginnt sich mit Wasser zu füllen. Jetzt gilt es schnell zu handeln! Sobald der Schatz unter Wasser ist, wird er für immer verloren sein. Daher möchte Indiana Jones die wertvollsten Stücke retten. Leider kann sein Rucksack maximal 15 kg tragen. Bei einem grösseren Gewicht reisst der Rucksack. Es ist auch nicht möglich, dass er einen Teil der Beute in den Händen trägt, da er beide Hände braucht, um aus der Höhle klettern zu können.

Szenario 1: Bei dem Schatz handelt es sich um Münzen aus Kupfer. Je schwerer eine Münze ist, desto grösser ist ihr sie Wert (siehe die Auflistung unten).

Aufgabe 1

a) Formuliere eine möglichst optimale Strategie für das Packen des Rucksacks.
Wähle jeweils den wertvollsten Gegenstand, der noch in den Rucksack passt.

b) Was stellst du fest? Wie könnte dein Algorithmus gegebenenfalls verbessert werden? Diskutiere deine Lösung mit deinen Klassenkameradinnen und Klassenkameraden.



Münze 1	Münze 2	Münze 3	Münze 4	Münze 5	Münze 6	Münze 7	Münze 8	Münze 9
1 kg	2 kg	3 kg	5 kg	10 kg	6 kg	4 kg	12 kg	9 kg
1.-	2.-	3.-	5.-	10.-	6.-	4.-	12.-	9.-

Tabelle 11

Aufgabe

Indiana Jones möchte gerne einen Lösungsalgorithmus finden, welcher für jede Probleminstanz eine optimale Lösung liefert. Er formuliert daher die untenstehenden Algorithmen.
Suche für jeden Algorithmus eine Probleminstanz, bei welcher nicht die optimale berechnet wird.

Algorithmus 1: Möglichst die wertvollsten Objekte wählen

Wähle jeweils den wertvollsten Gegenstand, welcher noch in den Rucksack gelegt werden kann, und lege diesen in den Rucksack. Wiederhole das so lange, bis kein Gegenstand mehr in den Rucksack gelegt werden kann.
Es gibt mehrere Lösungen, zum Beispiel:

Münze 1	Münze 2	Münze 3	Münze 4	Münze 5	Münze 6	Münze 7	Münze 8	Münze 9
8 kg	7 kg	3 kg	5 kg	10 kg	6 kg	4 kg	13 kg	9 kg
8.-	7.-	3.-	5.-	10.-	6.-	4.-	13.-	9.-

Tabelle 12

Die berechnete Lösung wäre hier: Münze 8 mit einem Gewicht von 13 kg und einem Wert von 13.-. Die optimale Lösung wäre hingegen Münze 4 und 5 mit einem Gewicht von 15 kg und einem Wert von 15.-.

Eine möglichst schlechte Lösung könnte z.B. folgendermassen aussehen:

	Münze 1	Münze 2	Münze 3
Gewicht	9 kg	7 kg	8 kg
Wert	9.-	7-	8.-

Tabelle 13

Die optimale Lösung wäre hier Münze 2 und 3 mit einem Gewicht von 15 kg und einem Wert von 15.-. Die gewählte Lösung wäre aber Münze 1 mit einem Gewicht von 9 kg und einem Wert von 9.-.

Algorithmus 2: Möglichst viele Objekte wählen

Wähle jeweils den leichtesten möglichen Gegenstand aus und lege diesen in den Rucksack. Wiederhole das so lange, bis kein Gegenstand mehr in den Rucksack gelegt werden kann.

Es gibt mehrere Lösungen, zum Beispiel:

Münze 1	Münze 2	Münze 3	Münze 4	Münze 5	Münze 6	Münze 7	Münze 8	Münze 9
2 kg	2 kg	2 kg	2 kg	2 kg	2 kg	5 kg	13 kg	9 kg
2.-	2.-	2.-	2.-	2.-	2.-	5.-	13.-	9.-

Die berechnete Lösung wäre hier: Münze 1 bis 6 mit einem Gewicht von 12 kg und einem Wert von 12.-
Die optimale Lösung wäre hingegen Münze 7 und 9 mit einem Gewicht von 14 kg und einem Wert von 14.-

Eine möglichst schlechte Lösung wäre hier:

	Münze 1	Münze 2
Gewicht	1 kg	15 kg
Wert	1.-	100.-

Tabelle 14

Die berechnete Lösung wäre hier Münze 1 mit einem Gewicht von 1 kg und einem Wert von 1.-.
Die optimale Lösung wäre aber Münze 2 mit einem Gewicht von 15 kg und einem Wert von 100.-.

Algorithmus 3: Eine gute Mischung

Wähle abwechslungsweise den wertvollsten und den leichtesten möglichen Gegenstand aus und lege diesen in den Rucksack. Wiederhole das so lange, bis kein Gegenstand mehr in den Rucksack gelegt werden kann.

Es gibt mehrere Lösungen, zum Beispiel:

Münze 1	Münze 2	Münze 3	Münze 4	Münze 5	Münze 6	Münze 7	Münze 8	Münze 9
1 kg	3 kg	10 kg	4 kg	8 kg	2 kg	5 kg	13 kg	9 kg
1.-	3.-	10.--	4.-	8.-	2.-	5.-	13.-	9.-

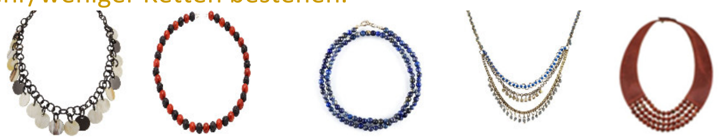
Tabelle 15

Die berechnete Lösung wäre hier: Münze 13 und 1 mit einem Gewicht von 14 kg und einem Wert von 14.-.
Die optimale Lösung wäre hingegen Münze 3 und 7 mit einem Gewicht von 15 kg und einem Wert von 15.-.

SZENARIO 2: Bei dem Schatz handelt es sich um Halsketten. Jede ist genau einmal vorhanden. Jede hat ein anderes Gewicht und einen anderen Wert (siehe das Beispiel unten). Die Halsketten können nicht zerteilt werden.

a) Finde für jeden Algorithmus aus der letzten Aufgabe eine Probleminstanz, bei welcher der Algorithmus nicht die optimale Lösung liefert.
b) Finde für jeden Algorithmus aus der letzten Aufgabe eine Probleminstanz, bei welcher der Algorithmus eine Lösung liefert, welche 100-mal schlechter ist als die optimale Lösung.

Es folgt ein Beispiel für mögliche Gewichte/Werte: Die zu bestimmenden Probleminstanzen dürfen auch aus mehr/weniger Ketten bestehen.



	Kette 1	Kette 2	Kette 3	Kette 4	Kette 5
Gewicht	2 kg	1 kg	3 kg	3 kg	5 kg
Wert	100.-	1.-	81.-	90.-	50.-

Tabelle 16

Algorithmus 1: Möglichst die wertvollsten Objekte wählen
Es gibt mehrere mögliche Lösungen, zum Beispiel:
Kette 1 wiegt 15 kg und hat einen Wert von 10 Fr.. Die Ketten 2 bis 113 wiegen je 133 g und haben je einen Wert von 9.-.
Die gewählte Lösung wäre somit Kette 1, das Gesamtgewicht 15 kg und der Gesamtwert 10.- Fr.
Die optimale Lösung wären die Ketten 2-113, das Gesamtgewicht wäre $112 \cdot 0.133 = 14.896$ kg und der Gesamtwert wäre $112 \cdot 9 = 1008$ Fr..

Algorithmus 2: Möglichst viele Objekte wählen
Es gibt mehrere mögliche Lösungen, zum Beispiel:
Kette 1 wiegt 14 kg und hat einen Wert von 1.-, Kette 2 wiegt 15 kg und hat einen Wert von 100.- Fr..
Die gewählte Lösung wäre somit Kette 1, das Gesamtgewicht 14 kg und der Gesamtwert 1.- Fr..
Die optimale Lösung wäre Kette 2, das Gesamtgewicht 15 kg und der Gesamtwert 100.- Fr..

Algorithmus 3: Eine gute Mischung
Es gibt mehrere mögliche Lösungen, zum Beispiel:
Kette 1 wiegt 15 kg und hat einen Wert von 10 Fr. Die Ketten 2 bis 113 wiegen je 133 g und haben je einen Wert von 9.- Fr..
Die gewählte Lösung wäre somit Kette 1, das Gesamtgewicht 15 kg und der Gesamtwert 10.- Fr..
Die optimale Lösung wären die Ketten 2-113, das Gesamtgewicht wäre $112 \cdot 0.133 = 14.896$ kg und der Gesamtwert wäre $112 \cdot 9 = 1008$ Fr..

SZENARIO 3: Bei dem Schatz handelt es sich um Halsketten. Jede Halskette ist genau einmal vorhanden. Jede hat ein anderes Gewicht und einen anderen Wert (siehe die Auflistung unten). Allerdings ist es möglich, die Ketten zu öffnen und nur einen Teil der Perlen mitzunehmen.

a) Wie muss Indiana Jones vorgehen, um seinen Rucksack möglichst optimal zu packen? Formuliere einen Algorithmus, welcher für jede Probleminstanz garantiert die optimale Lösung findet und wende diesen auf die untenstehenden Probleminstanzen an.
Für die optimale Lösung wählt man in Beispiel 1 die Ketten 1, 8, 4, 3. Der Gesamtwert ist so 341.- Fr..
Für die optimale Lösung wählt man in Beispiel 2 die Ketten 1, 8 und $\frac{6}{7}$ der Kette 4. Der Gesamtwert ist so 370.- Fr..

Idee 1: Er wählt jeweils die teuerste Kette, welche leichter als die freie Kapazität ist. Der Wert wird zum Gesamtwert addiert, das Gewicht von der freien Kapazität subtrahiert.
Erkenntnis: Dieses Vorgehen führt dazu, dass in Beispiel 1 die Ketten 6 und 2 gewählt werden, was zu einem Gesamtwert von 136.- führt. Das Vorgehen ist also nicht optimal.

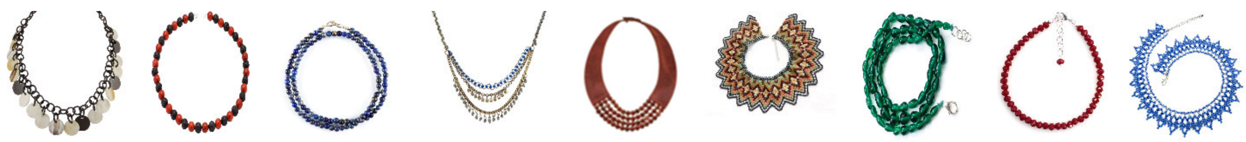
Idee 2: Für jede Kette wird der Wert pro Gewicht berechnet. Es wird jeweils die Kette gewählt, welche den höchsten Wert pro Gewicht hat und leichter ist als die freie Kapazität. Der Wert wird zum Gesamtwert addiert, das Gewicht von der freien Kapazität subtrahiert.
Erkenntnis: Dieses Vorgehen liefert in Beispiel 1 die optimale Lösung, jedoch nicht in Beispiel 2. Hier würde mit dieser Methode die Ketten 1, 8, 3, 2 mit einem Gesamtgewicht von 9 kg und einem Wert von 311.- gewählt.

Idee 3: Idee 2 wird so erweitert, dass immer die Kette mit dem höchsten Wert pro Gewicht gewählt wird. Ist die Kette schwerer als die freie Kapazität, dann wird sie so zerschnitten, dass die freie Kapazität genau gefüllt werden kann. Der Wert wird anteilsmässig zum Gesamtwert addiert.
Erkenntnis: Dieses Vorgehen funktioniert bei beiden Beispielen. In Beispiel 1 ändert sich die Lösung nicht, in Beispiel 2 werden die Ketten 1, 8 und $\frac{6}{7}$ der Kette 4 gewählt. Das Gesamtgewicht ist somit 10 kg, der Gesamtwert 370.- Fr..

d) Formuliere diesen Algorithmus so genau, dass alle den Algorithmus ausführen können und damit eine optimale Lösung finden können.
Setze die freie Kapazität auf das maximale Gewicht, welches der Rucksack tragen kann.
Setze den Gesamtwert auf 0.- Fr..
Berechne für alle Gegenstände den Wert pro Gewicht.
Solange die freie Kapazität grösser als 0 ist und solange noch Gegenstände vorhanden sind, wiederhole die folgenden Schritte:
Wähle den Gegenstand mit dem höchsten Wert pro Gewicht. Falls er leichter ist als die freie Kapazität, legen den Gegenstand ganz in den Rucksack.
Addiere den Wert zum Gesamtwert.
Subtrahiere das Gewicht von der freien Kapazität.
Falls der Gegenstand schwerer als die freie Kapazität ist, zerschneide ihn so, dass er die freie Kapazität ausfüllt.
Addiere den Wert anteilsmässig zum Gesamtwert.
Subtrahiere das Gewicht anteilsmässig von der freien Kapazität.

b) Begründe, weshalb der Algorithmus für jede Probleminstanz eine optimale Lösung findet.
Das Wählen der Gegenstände mit dem höchsten Wert pro Gewicht führt grundsätzlich zu einer optimalen Lösung. Allerdings kann das Problem auftreten, dass das Gesamtgewicht der gewählten Gegenstände kleiner als die maximale Kapazität ist. Dieser Platz kann jedoch gefüllt werden, indem ein Gegenstand zerteilt wird.

Probleminstanz 1

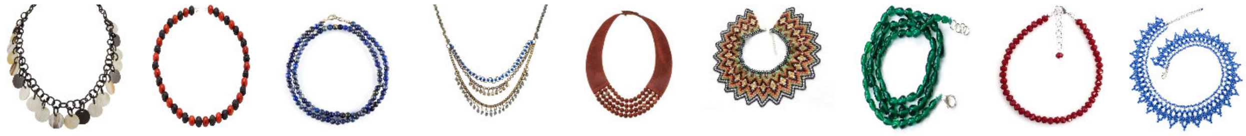


Kette 1	Kette 2	Kette 3	Kette 4	Kette 5	Kette 6	Kette 7	Kette 8	Kette 9
2 kg	1 kg	3 kg	3 kg	5 kg	9 kg	6 kg	2 kg	8 kg
100.-	1.-	81.-	90.-	50.-	135.-	90.-	90.-	100.-

50.-/kg	1.-/kg	27.-/kg	30.-/kg	10.-/kg	15.-/kg	15.-/kg	45.-/kg	12.5/kg

Tabelle 17

Probleminstanz 2



Kette 1	Kette 2	Kette 3	Kette 4	Kette 5	Kette 6	Kette 7	Kette 8	Kette 9
2 kg	1 kg	4 kg	7 kg	5 kg	9 kg	6 kg	2 kg	8 kg
100.-	1.-	120.-	210.-	50.-	135.-	90.-	90.-	100.-
50.-/kg	1.-/kg	25.-/kg	30.-/kg	10.-/kg	15.-/kg	15.-/kg	45.-/kg	12.5/kg

Tabelle 18

Szenario 4: Bei dem Schatz handelt es sich um verschiede Artefakte. Jedes ist nur einmal vorhanden. Jedes hat ein anderes Gewicht und einen anderen Wert (siehe die Auflistung unten). Es ist nicht möglich, die Artefakte zu zerteilen. Wie sollte Indiana Jones vorgehen, um seinen Rucksack möglichst optimal zu packen?

Aufgabe 5

a) Wie muss Indiana Jones vorgehen, um seinen Rucksack möglichst optimal zu packen? Überlege dir mögliche Algorithmen und teste sie an der untenstehenden Probleminstanz.
Optimale Lösung: O1 + O2 + O3 mit einem Gewicht von 15 kg und einem Wert von 251.-.

Algorithmus 1: Wähle jeweils den wertvollsten möglichen Gegenstand.
Resultat: O5 + O2 mit einem Gewicht von 10 kg und einem Wert von 173.-.

Algorithmus 2: Wähle jeweils den leichtesten Gegenstand, um möglichst viele Gegenstände einpacken zu können.
Resultat: O2 + O4 + O3 mit einem Gewicht von 14 kg und einem Wert von 248.-.

Algorithmus 3: Wähle jeweils den Gegenstand, welcher den grössten Wert pro Gewicht hat.
Resultat: O2 + O4 + O3 mit einem Gewicht von 14 kg und einem Wert von 248.-.

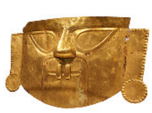
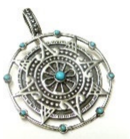
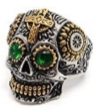
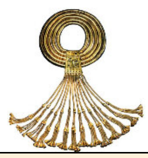
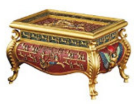
b) Was stellst du fest? Wie könnten deine Algorithmen gegebenenfalls verbessert werden? Diskutiere deine Überlegungen mit deinen Klassenkameradinnen und Klassenkameraden.
Keiner der Algorithmen liefert die optimale Lösung.

c) Auf wie viele Arten kann der Rucksack maximal gepackt werden? Schreibe alle Möglichkeiten auf.
Es gibt $2^5 = 32$ mögliche Arten. Allerdings überschreiten einige davon das Gewichtslimit.

	Gewicht	Wert	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10	V11	V12	V13	V14	V15	V16
Objekt 1	7	63	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
Objekt 2	1	13	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
Objekt 3	7	175	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
Objekt 4	6	60	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1
Objekt 5	9	180	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1
		Gesamtwert	0	63	13	175	60	180	76	238	123	243	188	73	193	235	355	240
		Gesamtgewicht	0	7	1	7	6	9	8	14	13	16	8	7	10	13	16	15

	V17	V18	V19	V20	V21	V22	V23	V24	V25	V26	V27	V28	V29	V30	V31	V32
Objekt 1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1
Objekt 2	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
Objekt 3	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1
Objekt 4	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1
Objekt 5	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1
Gesamtwert	251	136	256	298	418	303	248	368	253	415	478	316	431	311	428	491
Gesamtgewicht	15	14	17	20	23	22	14	17	16	22	29	23	24	21	23	30

Probleminstanz 1

Objekt 1	Objekt 2	Objekt 3	Objekt 4	Objekt 5
7 kg	1 kg	7 kg	6 kg	9 kg
63.-	13.-	175.-	60.-	180.-
9.-/kg	13.-/kg	27.-/kg	10.-/kg	20.-/kg

Tabelle 19

Arbeitsblatt 2

Wie wir im letzten Arbeitsblatt gesehen haben, ist es gar nicht so einfach, eine optimale Lösung zu finden, wenn man die Gegenstände nicht teilen darf. Eine Möglichkeit wäre, alle möglichen Lösungskandidaten aufzuschreiben und aus denjenigen, welche nicht schwerer als 15 kg sind, die mit dem grössten Wert zu wählen.

Aufgabe 6

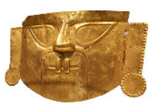
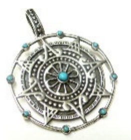
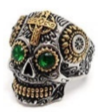
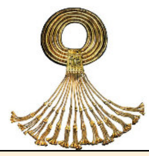
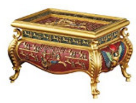
a) Berechne in der untenstehenden Tabelle jeweils die Anzahl möglicher Lösungskandidaten. Wie gehst du dabei vor?
   Jeder mögliche Lösungskandidat kann als binärer String der Länge n dargestellt werden. Die i-te Stelle repräsentiert das i-te Objekt. Wenn an der i-ten Stelle eine 1 steht, wird das Objekt in den Rucksack gepackt. Steht an der i-ten Stelle eine 0, wird das Objekt nicht in den Rucksack gepackt.
   Die Anzahl Lösungskandidaten ist somit 2^n.

b) Angenommen ein Computer kann pro Sekunde von 1'000 Kombinationen jeweils den Gesamtwert und das Gesamtgewicht berechnen. Wie lange bräuchte er, um die in der untenstehenden Tabelle angegebenen Probleminstanzen zu lösen? Halte deine Ergebnisse in der untenstehenden Tabelle fest.

Anzahl Objekte	1	5	10	20	30	50
Anzahl Kombinationen	2	32	1024	1048576	$1.074 \cdot 10^9$	$1.125 \cdot 10^{15}$
Benötigte Zeit	0.002 Sek.	0.032 Sek.	1 Sek.	1048.6 Sek.	1073741.8 Sek. also 12.43 Tage	$1.125 \cdot 10^{12}$ Sek. Also 35673.5 Jahre

Tabelle 20

Wie man sieht, führen schon relativ wenige Objekte dazu, dass die benötigte Rechenzeit sehr gross wird. Daher stellt sich die Frage, ob es nicht einen effizienteren Algorithmus gibt, welcher für jede Probleminstanz eine optimale Lösung liefert. Dazu soll nochmals die Probleminstanz aus dem Szenario 4 betrachtet werden.

Objekt 1	Objekt 2	Objekt 3	Objekt 4	Objekt 5
7 kg	1 kg	7 kg	6 kg	9 kg
63.-	13.-	175.-	60.-	180.-

Tabelle 21

Dieses Vorgehen soll nun etwas systematisch dokumentiert werden. Dazu soll die untenstehende Tabelle verwendet werden. Einige der Werte sind schon eingetragen.

Kapazität Rucksack			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Objekt	Gewicht	Wert	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
O 1	7	63	0	0	0	0	0	0	0	63	63	63	63	63	63	63	63	63
O 2	1	13	0	13	13	13	13	13	13	63	76	76	76	76	76	76	76	76
O 3	7	175	0	13	13	13	13	13	13	175	188	188	188	188	188	188	238	251
O 4	6	60	0	13	13	13	13	13	60	175	188	188	188	188	188	235	248	251
O 5	9	180	0	13	13	13	13	13	60	175	188	188	193	193	193	235	248	251

Die Tabelle wird zeilenweise ausgefüllt. Bei jedem Feld muss überprüft werden, ob der Gesamtwert bei der entsprechenden Kapazität grösser ist, wenn das Objekt gewählt wird oder nicht.
Schauen wir uns das an ein paar Beispielen an:

Betrachte das grün markierte Feld. Es wird das Objekt 2 und die Kapazität 6 betrachtet. Aus den bisher ausgefüllten Feldern wissen wir, dass bei einer Kapazität von 6 der Maximalwert 0.- beträgt.
Nun gibt es zwei Optionen: Entweder wird das Objekt 2 hinzugefügt oder nicht.
Falls das Objekt 2 hinzugefügt wird, so ist die Kapazität noch 6 kg - 1 kg=5 kg. Der Maximalwert ist somit der Maximalwert der Kapazität 5 plus den Wert von Objekt 4, also: 0.- + 13.- = 13.-.
Falls das Objekt 4 nicht hinzugefügt wird, bleibt der Maximalwert bei 0.-.
Da der Maximalwert bei der ersten Option grösser ist, wird in das grüne Feld 13 eingetragen.
Betrachte das orange markierte Feld. Es wird das Objekt 2 und Kapazität 7 betrachtet. Aus den bisher ausgefüllten Feldern wissen wird, dass bei einer Kapazität von 7 der Maximalwert 63.- beträgt.
Nun gibt es zwei Optionen: Entweder wird das Objekt 2 hinzugefügt oder nicht.
Falls das Objekt 2 hinzugefügt wird, beträgt die Kapazität 7 kg - 7 kg= 0 kg. Der Maximalwert ist somit der Maximalwert der Kapazität 0 plus den Wert von Objekt 2, also: 0.- + 13.- = 13.-.
Falls das Objekt 2 nicht hinzugefügt wird, bleibt der Maximalwert bei 63.-.
Da der Maximalwert bei der zweiten Option grösser ist, wird in das orange Feld 63 eingetragen.

Betrachte das hellblau markierte Feld. Es wird das Objekt 2 und die Kapazität 8 betrachtet. Aus den bisher gefüllten Feldern wissen wir, dass bei einer Kapazität von 8 der Maximalwert 63.- beträgt.
Nun gibt es zwei Optionen: Entweder wird das Objekt 2 hinzugefügt oder nicht.
Falls das Objekt 2 hinzugefügt wird, hat der Rucksack noch eine Kapazität von 8 kg - 7 kg = 1kg. Der Maximalwert ist somit der Maximalwert der Kapazität 1 plus den Wert von Objekt 2, also: 63.- + 13.-= 76.-.
Falls das Objekt 2 nicht hinzugefügt wird, bleibt der Maximalwert bei 63.-.
Da der Maximalwert bei der ersten Option grösser ist, wird in das hellblaue Feld 63 eingetragen.

AUFGABE: Vervollständige die Tabelle und bestimme den maximalen Wert, welcher in den Rucksack gepackt werden kann.

Kapazität Rucksack			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Objekt	Gewicht	Wert	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
O 1	7	63	0	0	0	0	0	0	0	63	63	63	63	63	63	63	63	63
O 2	1	13	0	13	13	13	13	13	13	63	76	76	76	76	76	76	76	76
O 3	7	175	0	13	13	13	13	13	13	175	188	188	188	188	188	188	238	251
O 4	6	60	0	13	13	13	13	13	60	175	188	188	188	188	188	235	248	251
O 5	9	180	0	13	13	13	13	13	60	175	188	188	193	193	193	235	248	251

Der grösste Wert der Tabelle entspricht somit dem maximalen Wert, welcher in den Rucksack gepackt werden kann. Doch wie kommt man nun von diesem maximalen Wert auf die gewählten Objekte? Versuche eine passende Strategie zu finden. Diskutiere deine Ideen mit deinen Klassenkameradinnen und Klassenkameraden.

Siehe oben

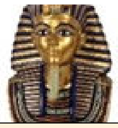
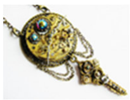
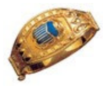
Aufgabe

Ist dieser Algorithmus immer effizient? Wo könnten mögliche Probleme liegen?

Die Grösse der Tabelle hängt von der maximalen Kapazität des Rucksacks ab. Wenn die Kapazität des Rucksacks sehr gross ist, wird die Tabelle ebenfalls sehr gross werden. In diesem Fall finden sehr viele Berechnungen statt und der Algorithmus ist nicht mehr effizient. Ein anderes Problem besteht, wenn nur sehr wenige Objekte vorliegen. Hier kann es schneller sein, alle möglichen Lösungskandidaten aufzuschreiben und auszuwerten.

Szenario 5

Bei dem Schatz handelt es sich um verschiedene Artefakte. Jedes ist nur einmal vorhanden. Jedes hat ein anderes Gewicht und einen anderen Wert (siehe die Auflistung unten). Es ist nicht möglich, die Artefakte zu zerteilen. Wie sollte Indiana Jones vorgehen, um seinen Rucksack möglichst optimal zu packen?

Objekt 1	Objekt 2	Objekt 3
10 kg	8 kg	4 kg
90.-	70.-	80.-

Tabelle 22

a) Bestimme die optimale Lösung dieser Probleminstanz, indem du den vorgestellten Algorithmus verwendest.

Kapazität Rucksack			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Objekt	Gewicht	Wert	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
O 1	10	90	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	90	90	90	90	90	90
O 2	8	70	0	0	0	0	0	0	0	0	70	70	90	90	90	90	90	90
O 3	4	80	0	0	0	0	80	0	0	0	70	70	90	90	150	150	170	170

Die optimale Lösung: O3 + O1 mit einem Gewicht von 14 kg und einem Wert von 170.-

b) Bestimme die optimale Lösung dieser Probleminstanz, indem du alle möglichen Optionen systematisch aufschreibst.

	Gewicht	Wert	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8
Objekt 1	10	90	0	1	0	0	1	1	0	1
Objekt 2	8	70	0	0	1	0	1	0	1	1
Objekt 3	4	80	0	0	0	1	0	1	1	1
		Gesamtwert	0	90	70	80	160	170	150	240
		Gesamtgewicht	0	10	8	4	18	14	12	22

c) Was stellst du fest?

Das systematische Aufschreiben benötigt weniger Zeit.

Arbeitsblatt 3

In den Arbeitsblättern 1 und 2 wurden verschiedene Varianten des sogenannten Rucksackproblems betrachtet. Das Rucksackproblem ist eines der klassischen Probleme der Informatik.
Allgemein lässt es sich folgendermassen formulieren:

Rucksackproblem
Gegeben ist eine Menge an Objekten, welche je ein Gewicht und einen Wert haben. Bestimme, welche Objekte ausgewählt werden müssen, damit das Gesamtgewicht kleiner als oder gleich gross wie ein bestimmtes Limit ist und der Wert maximiert wird.

In der realen Welt lassen sich viele Probleme auf das Rucksackproblem zurückführen. Angenommen eine Firma hat sehr viele Aufträge, aber zu wenig Zeit, um alle zu erledigen. Die Objekte wären in diesem Fall die Aufträge, das Gewicht ist die Zeit, welche man zum Erledigen der Aufträge braucht und der Wert ist der Gewinn, welcher man mit dem Erledigen es Auftrages macht.
Eine andere Anwendung besteht im Bereich der Software-Entwicklung. Die zur Verfügung stehende Rechenkapazität ist beschränkt und es muss entschieden werden, welche Operationen ausgeführt werden sollen.

AUFGABE: Überlege dir weitere reale Probleme, welche sich auf das Rucksackproblem zurückführen lassen.
Es gibt verschiedene Lösungen, die im Plenum besprochen werden sollten.

Je nachdem welche Anwendung modelliert werden soll, lässt sich das Rucksackproblem einschränken. Das konnte in den verschiedenen Szenarien beobachtet werden. Bei einigen dieser Teilprobleme lassen sich effiziente Algorithmen finden, welche immer eine optimale Lösung liefern (z.B. in Szenario 2). In den meisten Fällen lässt sich eine optimale Lösung allerdings nur dann finden, wenn alle möglichen Kombinationen ausprobiert werden. Dies führt zu einem exponentiellen Aufwand und ist daher alles andere als effizient.

Der in Arbeitsblatt 2 vorgestellte Algorithmus basiert auf dynamischer Programmierung. Wenn alle Gewichte ganzzahlig sind, liefert der Algorithmus immer eine optimale Lösung. Allerdings konnte in Szenario 4 gesehen werden, dass der Algorithmus nicht immer der effizienteste ist.

AUFGABE:

a) Was ist das Problem bei diesem Algorithmus, wenn die Gewichte rational, aber nicht ganzzahlig sind? Wie kann dieses gelöst werden?
In der jetzigen Form enthält die Tabelle als mögliche Kapazitäten nur natürliche Zahlen. Bei rationalen Zahlen wären aber auch rationale Kapazitäten möglich.
Die Tabelle müsste als Kapazität auch Dezimalzahlen enthalten. Eine andere Möglichkeit wäre es, alle Gewichte und die Rucksackkapazität mit einer natürlichen Zahl d zu multiplizieren, damit alle Werte ganzzahlig sind. Allerdings wird die Berechnungskomplexität somit auch $d$mal grösser.

b) Warum funktioniert der Algorithmus nicht, wenn die Gewichte nicht rational sind?
Die Tabelle müsste als Kapazitäten auch Dezimalzahlen enthalten. Wenn die Gewichte nicht rational sind, können sie nicht mit einer natürlichen Zahl d multipliziert werden, um ganzzahlig zu werden.

c) Warum ist der Algorithmus auch bei ganzzahligen Gewichten nicht immer der effizienteste?
Wenn nur wenige Objekte vorhanden sind, kann es effizienter sein, alle Möglichkeiten systematisch aufzuschreiben. Auch wenn die Kapazität des Rucksacks sehr gross ist, kann es besser sein, die Möglichkeiten systematisch aufzuschreiben.

Erkenntnis
Für das allgemeine Rucksackproblem existiert kein Algorithmus, welcher für jede Probleminstanz effizient eine optimale Lösung findet.

Was auf den ersten Blick frustrierend erscheinen mag, ist allerdings nicht so schlimm. In der Praxis ist es nämlich häufiger wichtig, möglichst schnell eine gute Lösung zu finden als eine optimale. Es werden daher oft Algorithmen verwendet, welche mit einer möglichst hohen Wahrscheinlichkeit schnell eine gute Lösung finden. Auf diese Algorithmen soll aber an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden.

EPILOG

Indiana Jones gelingt es rechtzeitig, seinen Rucksack zu füllen und rechtzeitig aus der Höhle zu klettern. Ob er tatsächlich die wertvollsten Stücke gerettet hat, kann er leider nicht beurteilen. Aber er ist mit seiner Beute sehr zufrieden. Er freut sich schon auf sein nächstes Abenteuer und beschliesst, nächstes Mal einen grösseren Rucksack mitzunehmen.

Lösungen

Arbeitsblatt

Quellen

Bild Indiana Jones
http://www.clipartbest.com/cliparts/LiK/5gr/LiK5grMRT.jpg

Bild Münze
https://numiscorner.s3.eu-central-1.amazonaws.com/89/04/80/890480A.jpg

Bilder Halsketten
https://ina-style.de/shop/halsketten/southafrica-halskette-creme-schwarz/
https://images-na.ssl-images-amazon.com/images/I/719xGcope-L._AC_UY575_.jpg
https://i.etsystatic.com/25819585/r/il/5867ce/3193381880/il_1588xN.3193381880_808d.jpg
https://i.etsystatic.com/22057097/r/il/3618bc/2206539999/il_1140xN.2206539999_4pt5.jpg
https://i.etsystatic.com/19342490/r/il/042440/2425355427/il_1140xN.2425355427_ew0d.jpg
https://i.etsystatic.com/16533248/r/il/c7e2cc/2936596691/il_1140xN.2936596691_9xqg.jpg
https://i.etsystatic.com/21623661/r/il/e69a0d/2428931797/il_fullxfull.2428931797_k9dv.jpg
https://i.etsystatic.com/21989095/r/il/599b05/3179386198/il_fullxfull.3179386198_fpuu.jpg
https://i.etsystatic.com/6481017/r/il/7249cc/2505706678/il_1588xN.2505706678_g3vc.jpg

Bilder Artefakte
https://media.pagefly.io/file/get/synobildauinkamaske_inclcopyrightjpg-1533051752727.jpg
https://images-na.ssl-images-amazon.com/images/I/81wice%2BRX7L._AC_UX575_.jpg
https://images-eu.ssl-images-amazon.com/images/I/51e25GRYCdL._AC_UL260_SR200,260_.jpg
https://i.pinimg.com/474x/ee/4e/8b/ee4e8b079d51739f6ab76d1336741433--egyptian-jewelry-egyptian-art.jpg
https://images-na.ssl-images-amazon.com/images/I/81xFw-dETrL._SY355_.jpg
https://www.der-roemer-shop.de/media/image/product/95/md/becher-taenzerinnen-terra-sigillata-roemischer-relief-kelch.jpg
https://cdn03.plentymarkets.com/p1vihgukvkmu/item/images/17257/full/IYT90004-aegyptische-Bueste-Tutanchamun-10cm-IYT900.jpg
https://i.etsystatic.com/8973580/r/il/fa310e/1192479596/il_fullxfull.1192479596_om5j.jpg
https://www.kunstplaza.de/wp-content/uploads/ads/awpcp/images/skarabaeus-armreif-des-tutanchamun-a47a94bb-large.jpg