

Algorithmisch lösbare und algorithmisch unlösbare Probleme

Autor: *Alexandra Maximova*

Fachdidaktik Informatik II (FS2020)
Fachliches und fachdidaktisches Review: *Prof. Dr. Juraj Hromkovič*

Aufgabe zur Reduktion im 'positiven' Sinne

Auftrag. Die Aufgabe besteht darin, ein Beispiel zur Nutzung der Reduktion im positiven Sinn zu verfassen. Das heisst, dass ein neues Problem mit Hilfe eines bekannten Algorithmus für ein anderes Problem gelöst werden kann.

Logarithmus zu einer beliebigen Basis. Nehmen wir an, wir haben einen Algorithmus B , um den Logarithmus einer beliebigen Zahl $x \geq 0$ zur Basis b zu berechnen, d.h. $\log_b(x)$. Entwickle mittels Reduktion einen Algorithmus zur Berechnung vom Logarithmus zur Basis a .

Heute scheint uns dieses Problem künstlich und konstruiert zu sein, aber vor nicht all zu langer Zeit war das tatsächlich praxisrelevant. Bevor die modernen Taschenrechner erschienen, die Logarithmen in jeder Basis berechnen können, haben Ingenieure täglich mit Tabellen gearbeitet, die die Logarithmen zur Basis 10 für sehr viele Zahlen aufgelistet haben. Manchmal brauchten sie den Logarithmus zu einer anderen Basis, die nicht tabelliert war; das konnten sie aber einfach aus den Werten der Tabelle berechnen.

Zur Erinnerung, der Logarithmus ist bijektiv für $x \geq 0$ und es gelten folgende Rechenregeln:

(a) $\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$

(b) $\log(x^y) = y \cdot \log(x)$

Musterlösung. Bezeichnen wir durch U_B das Problem, den Logarithmus zur Basis b zu berechnen und durch U_A das Problem, den Logarithmus zur Basis a zu berechnen. Wir werden $U_A \leq_{Alg} U_B$ zeigen, d.h. U_A auf U_B reduzieren. Dafür müssen wir und einen Algorithmus A konstruieren, welcher den gegebenen Algorithmus B benutzt und den Logarithmus zur Basis a berechnet.

Wir möchten also $\log_a(x)$ berechnen und können dafür den Logarithmus zur Basis b von beliebigen Zahlen mit dem Algorithmus B berechnen. Sei $y = \log_b(x)$. Dann, aus der Definition des Logarithmus, muss $a^y = x$ sein. Da nach Annahme $x \geq 0$, können wir auf beiden Seiten der Gleichung die bijektive Funktion \log_b anwenden, ohne dass

sich die Menge der Resultate ändert.

$$\begin{aligned}
 a^y &= x \\
 \log_b(a^y) &= \log_b(x) \\
 y \cdot \log_b(a) &= \log_b(x) && \text{(Rechenregeln anwenden)} \\
 \log_a(x) \cdot \log_b(a) &= \log_b(x) && \text{(Definition für } y \text{ einsetzen)} \\
 \log_a(x) &= \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} && (a \neq 1)
 \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir beide Seiten der Gleichung durch $\log_b(a)$ geteilt. Das können wir genau dann machen, wenn $a \neq 1$. Das können wir hier annehmen, weil es keinen Sinn hat, 1 als die Basis eines Logarithmus zu verwenden.

Den Algorithmus A konstruieren wir folgendermassen: Wir benutzen den Algorithmus B , um $\log_b(x)$ und $\log_b(a)$ zu berechnen, und dann ermitteln wir die Antwort, indem wir diese zwei Zahlen durcheinander teilen.

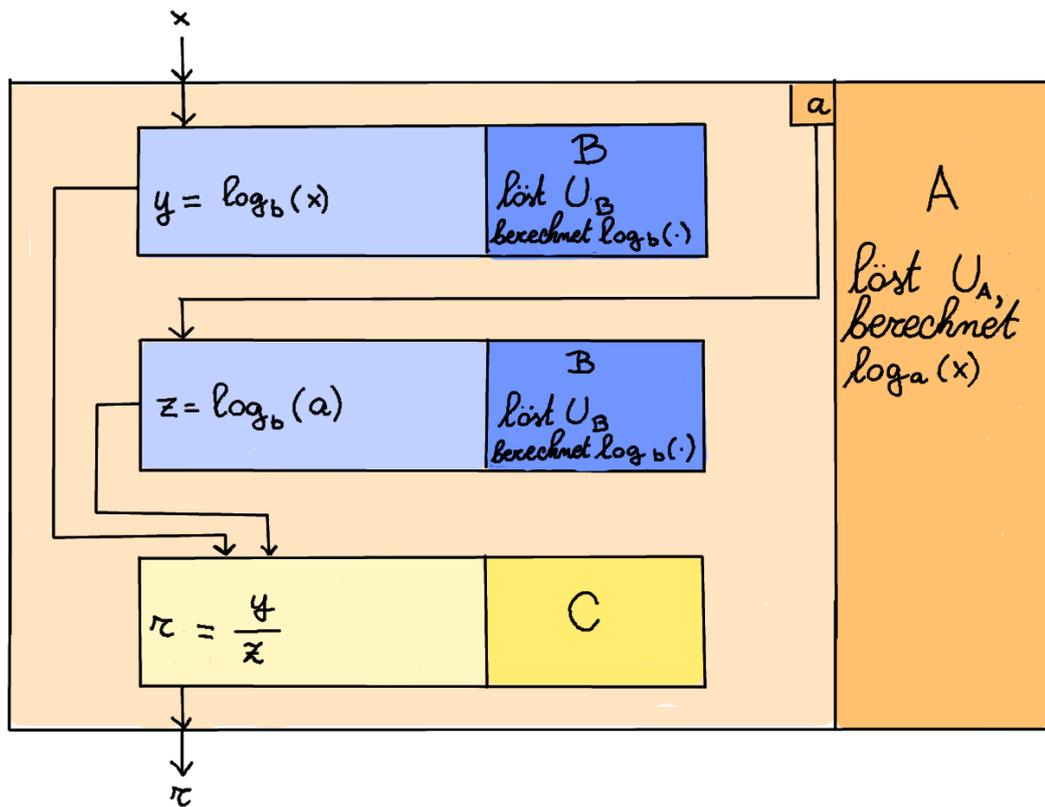


Abbildung 1: Reduktion von U_A auf U_B .

Aufgabe zur Reduktion im 'negativen' Sinne

Auftrag. Diese zweite Aufgabe soll mit Hilfe der Reduktion die Nichtlösbarkeit eines neuen Problems zeigen. Dabei dürfen Sie eine spezielle eingeschränkte Klasse von Algorithmen in Betracht ziehen und sich somit etwas ganz Originelles einfallen lassen.

“Triangularisierung” des Kreises. Wir haben alle schon mal von der Quadratur des Kreises gehört und dass es unmöglich sein soll. Genauer, das Problem Q_{\circ} besteht darin, mit Zirkel und Lineal in endlich vielen Schritten aus einem gegebenen Kreis ein Quadrat mit gleichem Flächeninhalt zu konstruieren. Der Beweis, dass es keinen ZL-Algorithmus (Zirkel-Lineal Algorithmus) für Q_{\circ} gibt, ist nicht trivial und wir glauben an dieser Stelle den Mathematikern, die es bewiesen haben.

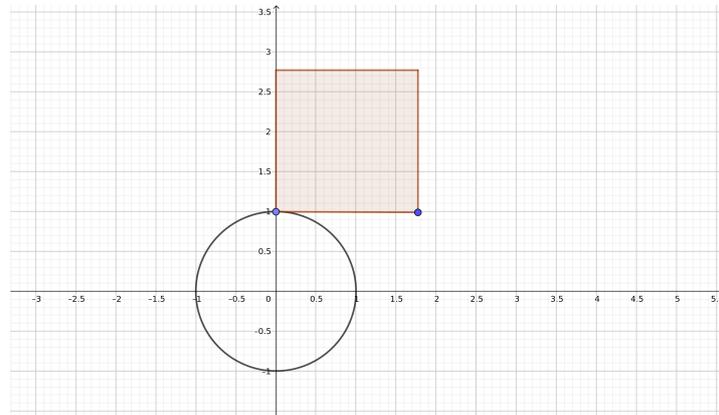


Abbildung 2: Quadratur des Kreises: konstruiere mit Zirkel und Lineal ein Quadrat mit dem gleichen Flächeninhalt von einem gegebenen Kreis.

Betrachte das Problem der “Triangularisierung” des Kreises. Dieses Problem bezeichnen wir mit D_{\circ} und definieren wie folgt: Gegeben ein Kreis, konstruiere mit Zirkel und Lineal in endlich vielen Schritte ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck, so dass das Dreieck und der Kreis den gleichen Flächeninhalt haben.

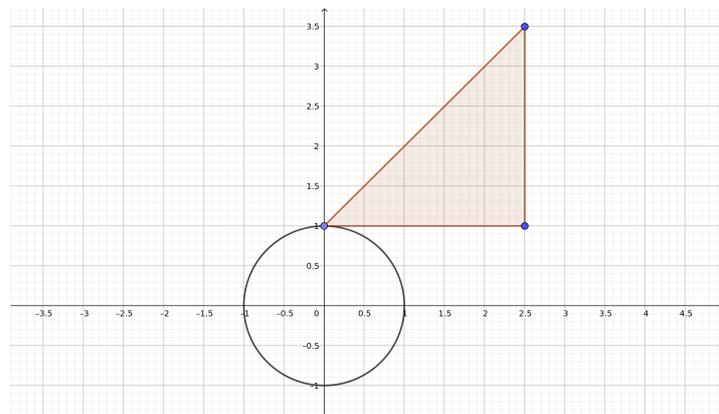


Abbildung 3: “Triangularisierung” des Kreises: konstruiere mit Zirkel und Lineal ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck mit dem gleichen Flächeninhalt von einem gegebenen Kreis.

Beweise mittels Reduktion, dass kein ZL-Algorithmus zur “Triangularisierung” des Kreises existiert.

Musterlösung. Wir wissen, dass es keinen ZL-Algorithmus für Q_{\circ} gibt und möchten diese Tatsache benutzen, um zu zeigen, dass es keinen ZL-Algorithmus für D_{\circ} gibt.

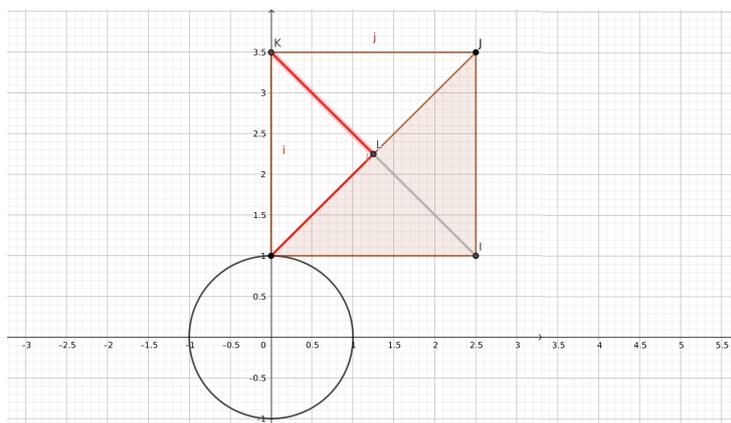
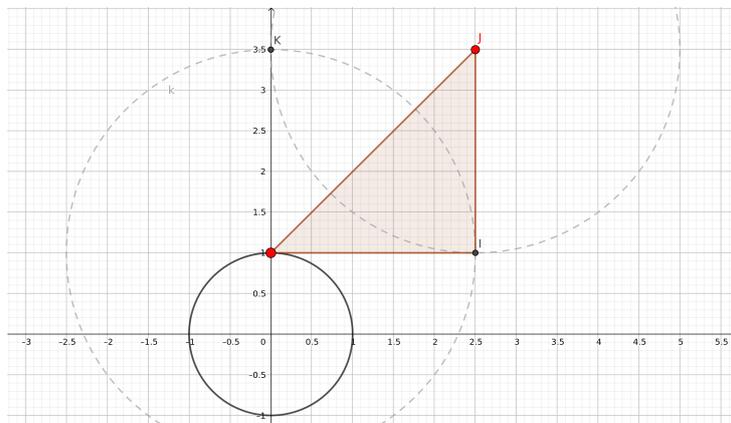
Wir nutzen dabei die Methode des indirekten Beweises: Wir nehmen das Gegenteil von dem an, was wir beweisen möchten, und folgern daraus etwas Falsches. Das impliziert, dass unsere Annahme falsch sein muss, und somit haben wir genau das bewiesen, was wir wirklich beweisen wollten.

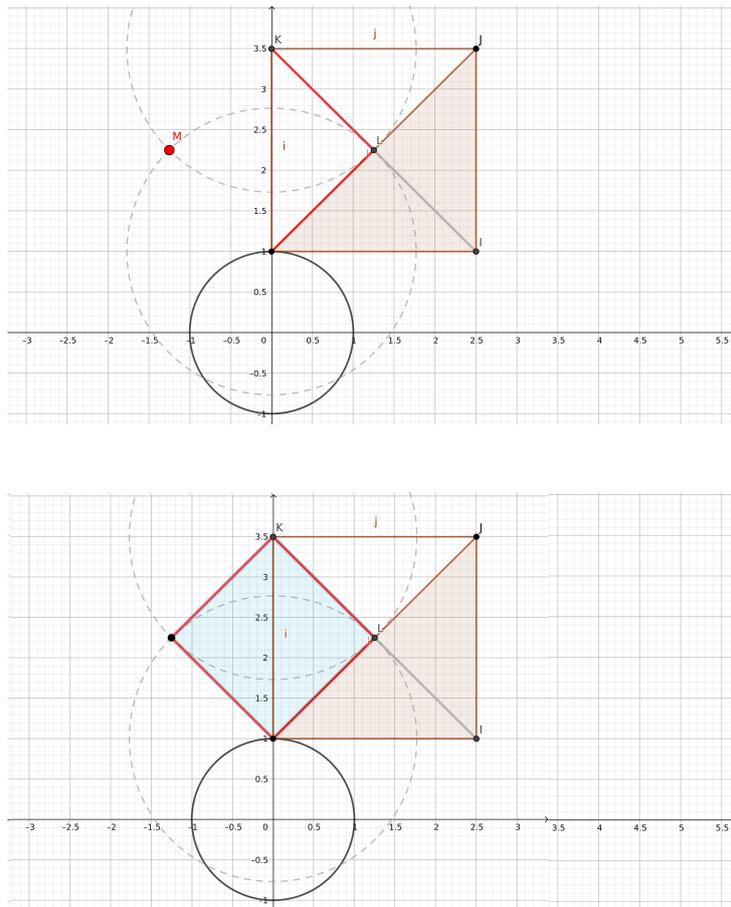
In diesem Fall nehmen wir also an, dass wir einen ZL-Algorithmus für D_{\circ} haben und konstruieren daraus einen ZL-Algorithmus für Q_{\circ} . Da es keinen solchen Algorithmus gibt, muss unsere Annahme falsch sein.

Wir reduzieren also Q_{\circ} auf D_{\circ} und zeigen $Q_{\circ} \leq_{Alg} D_{\circ}$. Aus $Q_{\circ} \leq_{Alg} D_{\circ}$ und Q_{\circ} unlösbar folgern wir, dass D_{\circ} auch unlösbar sein muss.

Sei A_d ein ZL-Algorithmus, welcher D_{\circ} löst. Diesen Algorithmus benutzen wir, um einen ZL-Algorithmus A_q für Q_{\circ} zu konstruieren. Dafür müssen wir mit Zirkel und Lineal in endlich vielen Schritte ein Quadrat konstruieren, welches den gleichen Flächeninhalt von einem gegebenem rechtwinkligem gleichschenkligen Dreieck hat.

Möglich wäre folgende Abfolge:





Somit haben wir den ZL-Algorithmus A_q aus A_d konstruiert, welcher die Quadratur der Kreises findet. Da ein solcher Algorithmus nicht existiert, haben wir bewiesen, dass A_d nicht existieren kann.

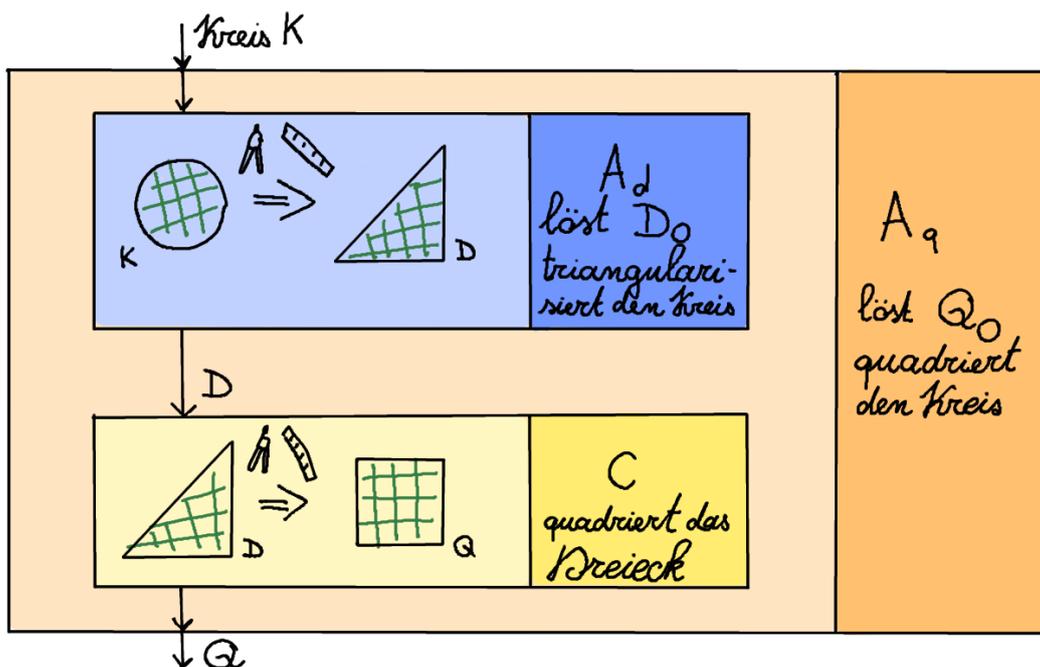


Abbildung 4: Reduktion von Q_0 auf D_0 .