Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

MENTORIERTE ARBEIT IN FACHWISSENSCHAFTLICHER VERTIEFUNG MIT PÄDAGOGISCHEM FOKUS IN MATHEMATIK

Chomp – ein Nim-Spiel

Beat Jäckle

Inhalt

Wir erarbeiten Strategien für ein mehrdimensionales Spiel. In diesem Spiel verkleinern zwei Parteien ein geometrisches Objekt.

Zielpublikum

Mathematiker:innen

Voraussetzungen

Minimales Vorwissen über Graphentheorie

Form

Theoretische Arbeit ohne Übungen

Betreuung

Herr Prof. Dr. Andreas Müller

Datum

14. Dezember 2023

Zusammenfassung

Als Einstieg in die Nim-Spiele beginnen wir mit ein paar einfachen oder klassischen Beispielen. Anhand dieser Beispiele erklären wir die Gewinn- und Verlustpositionen. Diese stellen wir in einem Graphen dar und erkläre, was eine Strategie ist.

Wir beschreiben das Spiel *Chomp*[1] und untersuche die Verlustpositionen.

Wir erweitern das Spiel in drei Dimensionen auf mindestens einen Würfel mit Kantenlänge 2. Welche Ideen passen auch noch für drei oder mehr Dimensionen?

Notation

Listen werden in dieser Arbeit mit eckigen Klammern gekennzeichnet. Wenn runde Klammern gebraucht werden, bedeutet dies, dass in diesem Kontext die Anzahl Objekte im Tupel vorgegeben ist. Bei der Liste können wir Elemente hinzufügen oder entfernen. Das wird bei einer Auflistung von Spielzügen oder Aufzählung von Reihen angewandt.

Diese Syntax wird von Python übernommen.

- Spielzüge werden durch Kleinbuchstaben und Tupel beschrieben. Zum Beispiel $b(2, 2)$
- Spielpositionen werden mit Grossbuchstaben und einer Liste beschrieben. Zum Beispiel $A[3, 3, 2]$

Dank

Ein Dankeschön geht an Herr Prof. Dr. Andreas Müller. Die Sitzungen und die vielen Mails halfen mit, die Arbeit so zu gestalten, dass sie einen roten Faden haben und dass ich immer wieder voller Motivation schreiben konnte.

Viele Personen aus meinem Umfeld haben mit mit Chomp gespielt und sich Erklärungen angehört. Dank ihren Nachfragen bemerkte ich, was ich anpassen muss. Herzlichen Dank für eure Zeit und Geduld.

In der Arbeit kommen sehr viele Abbildungen vor. Ich möchte mich bei der Person bedanken, welche mir TikZ beigebracht hat und mir immer wieder Entwürfe geschrieben hat, damit ich die geeigneten Methoden dafür lernen und als LaTeX Befehle implementieren konnte.

Inhaltsverzeichnis

1 Nim-Spiele **2**
1.1 Eine Reihe . . . 3
1.2 Variationen . . . 3
1.3 Mehrere Reihen — das Standardspiel . . . 4

2 Spielpositionen **5**
2.1 Begriffe und Notation . . . 5
2.2 Graph . . . 5
2.3 Graph ohne Spielanweisung . . . 7

3 Chomp (klassisch) **8**
3.1 Positionen in Chomp . . . 8
3.2 Positionen von 2×2 Chomp . . . 11
3.3 Aussagen über Positionen mit einfachem Muster . . . 11
3.3.1 I-Position . . . 11
3.3.2 Treppe-Position . . . 12
3.3.3 L-Position . . . 12
3.4 Eine Position analysieren . . . 14
3.4.1 Markierungen . . . 15
3.5 Weitere Verlustpositionen . . . 16
3.5.1 Mehrere Markierungen in einem Feld . . . 16
3.5.2 2n2 Treppe . . . 16
3.5.3 Die Strategie für das 6×4 Feld . . . 17
3.6 Gewinnstrategie . . . 17

4 Chomp 3D **18**
4.1 Notation . . . 19
4.2 Verlustpositionen im Würfel . . . 20
4.3 $3 \times 2 \times 2$ Quader . . . 20

5 Chomp nD **21**
5.1 Darstellung von 4D . . . 23
5.2 Notation . . . 24
5.3 Analyse des Hyperwürfels . . . 24

6 Offene Fragen **24**

A Lösungen **26**
A.1 Lösung des Spiels 4×4 . . . 26

1 Nim-Spiele

Bevor wir das Spiel Chomp anschauen, beginnen wir mit einfacheren Nim-Spielen.

Nim-Spiele sind eine Klasse von Spielen. Die Spiele sind für zwei Parteien konzipiert welche mit Streichhölzer auf dem Spielbrett spielen. In jedem Spielzug wird eine Anzahl Streichhölzer gezogen. Wer das letzte Streichholz zieht, hat gewonnen.

Man kann das Spiel auch mit anderen Gegenständen als Streichhölzern spielen. Im Klassenverband sind oft Spielkarten greifbar, mit denen sich das Spiel auch gut spielen lässt.

Das Standardbeispiel der Nim-Spiele werden wir als Spiel 1.3 vorstellen. Wir beginnen mit einer einfacheren Variation.

1.1 Eine Reihe

Spiel 1.1 (Nim-Spiel, eine Reihe)**.** *In einer Reihe sind 15 Streichhölzer. Zwei Spieler:innen nehmen abwechslungsweise 1, 2 oder 3 Streichhölzer. Die Person, welche das letzte Streichholz zieht, gewinnt.*

Beispiel 1.1. Die Reihe besteht aus 15 Streichhölzern. Die Partei A beginnt und nimmt ein Streichholz. Nun sind 14 Streichhölzer in der Reihe. Partei B nimmt 2 Streichhölzer, sodass 12 Streichhölzer in der Reihe sind. A nimmt nochmals nur ein Streichholz. Nun sind 11 Streichhölzer in der Reihe. B reduziert die Reihe auf 8 Streichhölzer, indem sie 3 Streichhölzer nimmt. A reduziert die Reihe um 3 Streichhölzer. Es bleiben noch 5 Streichhölzer. Davon nimmt B ein einziges Streichholz.

A bemerkt nun, dass B gewinnen wird.

1. Falls A 1 Streichholz zieht, kann B die anderen 3 Streichhölzer nehmen.
2. Falls A 2 Streichhölzer zieht, kann B die anderen 2 Streichhölzer nehmen.
3. Falls A 3 Streichhölzer zieht, kann B das letzte Streichholz nehmen.

B gewinnt. [A14, B12, A11, B8, A5, B4, A2, B0] ○

Wenn man das Spiel häufig spielt, wird man merken, wie man gewinnen kann. Kann man dem Gegenüber genau 4 Streichhölzer überlassen, kann man im nächsten Zug das letzte Streichholz nehmen. Wenn man dem Gegenüber 8 Streichhölzer überlässt, so kann man im nächsten Spielzug auf 4 Streichhölzer reduzieren und anschliessend gewinnen. Wenn das Gegenüber 12 Streichhölzer bekommt, so kann man nachher auf 8 Streichhölzer reduzieren.

Die gewinnbringende Strategie ist es, dem Gegenüber ein Vielfaches von vier Streichhölzern zu überlassen.

1.2 Variationen

Man kann auch mit einer Schulklasse das Spiel variieren. Wir werden später anschauen, wie man die Gewinnstrategie allgemein finden kann. Es kann auch spannend sein, als Lehrperson gegen Schüler:innen zu spielen, ohne dass man die Gewinnstrategie kennt.

Die wohl einfachste Variation ist die Anzahl Streichhölzer zu Beginn zu verändern. Starten wir mit 20 Streichhölzer statt mit 15.

Wir können die Spielregeln anpassen, sodass die Spieler 1, 2, 3 oder 4 Streichhölzer ziehen dürfen.

Spiel 1.2 (Nim-Spiel, eine Reihe, [1,3,5])**.** *Zwei Spieler:innen nehmen abwechslungsweise Streichhölzer. Zu Beginn hat es 15 Streichhölzer. Die Spieler dürfen 1, 3 oder 5 Streichhölzer jeweils wegnehmen. Wer das letzte Streichholz wegnehmen kann, gewinnt.*

Wenn man den Spieler:innen erlaubt, 1, 3 oder 5 Streichhölzer zu ziehen, so lässt sich die gewinnende Partei bereits vor dem Spiel bestimmen.

Wir werden später (in Beispiel 2.2) dieses Spiel als Beispiel brauchen und zugleich die Lösung dazu erarbeiten.

1.3 Mehrere Reihen — das Standardspiel

Beim Standardspiel gibt es mehrere Reihen. Man darf eine beliebige Anzahl Streichhölzer ziehen, jedoch nur von einer Reihe.

Spiel 1.3 (Nim-Spiel)**.** *Streichhölzer sind in mehreren Reihen angeordnet. Zwei Parteien nehmen abwechselnd mindestens ein Streichhölzer weg. Dabei darf nur von einer Reihe Streichhölzer weggenommen werden. Wer das letzte Streichholz nehmen kann, hat gewonnen.*

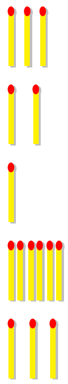


Abbildung 1: Reihen von Streichhölzer

Beispiel 1.2. Parteien A und B spielen gegeneinander. Die Grösse der Reihen werden als Tupel notiert. Die Ausgangslage ist (3,2,1,6,3). A beginnt und nimmt das einzelne Streichholz.

1. A (3,2,**0**,6,3)
2. B (3,2,0,**3**,3)
3. A (**2**,2,0,3,3)
4. B (2,2,0,**1**,3)
5. A (2,2,0,1,**1**)
6. B (**1**,2,0,1,1)
7. A (1,**1**,0,1,1)
8. B (**0**,1,0,1,1)
9. A (0,**0**,0,1,1)
10. B (0,0,0,**0**,1)

11. A (0,0,0,0,**0**)

A gewinnt. ◯

Auch in diesem Spiel gibt es eine Strategie, um zu gewinnen. Wir werden dies aber in dieser Arbeit nicht behandeln.

2 Spielpositionen

Die Situation vor und nach einem Spielzug nennen wir eine Position. In diesem Kapitel erarbeiten wir uns ein allgemeines Konzept über die Positionen. Die Positionen werden wir in Gewinn- und Verlustpositionen unterteilen. Damit können wir später Strategien formulieren.

2.1 Begriffe und Notation

Die Begriffe übernehmen wir von Dr. Regula Krapf [2].

Definition 2.1 (Gewinnstrategie)**.** *Mit einer Gewinnstrategie meint man, die Partei, welche am Zug ist, kann gewinnen, wenn sie keine Fehler macht.*

Bei den Spielen, welche wir in dieser Arbeit besprechen, unterscheidet man die Positionen zwischen:

- Gewinnposition (Wir stellen diese blau dar.)
- Verlustposition (Wir stellen diese rot dar.)

Eine Gewinnposition bedeutet, die Partei am Zug kann mit einer Gewinnstrategie gewinnen.

Eine Verlustposition bedeutet, die Partei am Zug verliert, wenn die Gegenpartei mit einer perfekten Strategie spielt.

Das Ziel ist es, durch einen Spielzug eine Gewinnposition in eine Verlustposition zu ändern, damit die Gegenpartei mit der Verlustposition nicht gewinnen kann. Wir möchten von blau nach rot ziehen.

Beispiel 2.2 (Gewinn- und Verlustpositionen Nim-Spiel [1,3,5])**.** Wie im Beispiel „Nim-Spiel, eine Reihe, [1,3,5]“ 1.2 angekündigt werden wir die Positionen aus diesem Spiel in Gewinn- und Verlustpositionen unterteilen.

Liegen 1, 3 oder 5 Streichhölzer auf dem Spielbrett und man ist am Zug, dann kann man gewinnen. Dies sind also Gewinnpositionen. Diese Positionen werden blau eingefärbt.

Eine Positionen vom Spiel „Nim-Spiel, eine Reihe, [1,3,5]“ ist genau dann eine Gewinnposition, wenn die Anzahl Streichhölzer ungerade ist. Ist die Anzahl gerade, so ist die Position eine Verlustposition. ◯

2.2 Graph

Die Positionen eines Spiels kann man in einem Graph als Knoten abbilden. Ein Spielzug wechselt das Spiel von einer Position zu einer andern. Dies kann durch einen Pfeil dargestellt werden. Setzt man für alle Knoten die Pfeile, welche die möglichen Spielzüge signalisieren, so erhält man einen gerichteten Graphen. Die Positionen, bei denen das Spiel endet, müssen markiert werden, ob diese Verlustpositionen oder Gewinnpositionen sind.

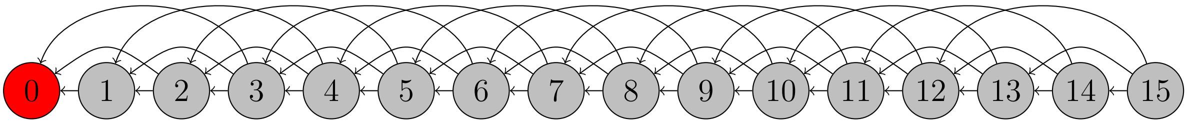


Abbildung 2: Graph des Spiels 1.1. Knoten 0 repräsentiert eine Verlustposition.

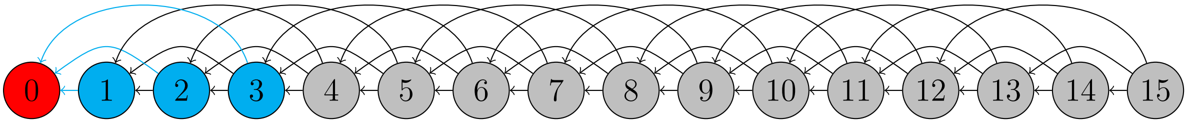


Abbildung 3: Graph des Spiels 1.1. Die Positionen 0–3 als Verlust- (rot) und Gewinnposition (blau) identifiziert. (Definitionen der Positionen in Kapitel 2.1)

Anstatt das Spiel zu spielen, kann man auf dem Graphen das Spiel simulieren, ohne die Regeln des Spiels zu kennen.

Beispiel 2.3. Nehmen wir das Beispiel 1.1 „Nim-Spiel, eine Reihe", dann ist die triviale endgültige Verlustposition 0 Streichhölzer in der Reihe. Wir markieren nur diese Endposition rot. (Abbildung 2) ○

Hat man die trivialen Endpositionen im Graphen eingetragen, so kann man weitere Knoten, respektive Positionen, klassifizieren. Wenn man aus einer Position (zum Beispiel 2 Streichhölzer) einen Zug (2 Streichhölzer ziehen) zu einer Verlustposition (0 Streichhölzer) machen kann, so kann man dem Gegenspielenden keine Chance geben und sich seines Sieges sicher sein. Dann ist diese neue Position (2 Streichhölzer) eine Gewinnposition. Wir können diesen Knoten blau einfärben.

Neben der 2 sind auch 1 und 3 Gewinnpositionen, denn man kann auch da mit einem Spielzug auf eine Verlustposition kommen. Diese Verlustposition ist die 0.

Welche Position ist die 4? Mit 4 Streichhölzern kann man nur die 1, 2 oder 3 Streichhölzer dem Gegenüber geben. Diese sind alle Gewinnpositionen. Da wir dem Gegenspielenden nur eine Gewinnposition geben können, ist das eine Verlustposition. Wir färben die 4 im Graphen rot ein (Abbildung 4).

Wenn wir also dem Gegenspielenden genau 4 Streichhölzer geben, können wir gewinnen.

Lemma 2.4 (Gewinnpositionen)**.** *Alle Knoten, die einen Pfeil auf den roten Knoten (Verlustposition) haben, sind blau (Gewinnpositionen).*

Dies betrifft die Knoten 5–7. Sie werden blau. Nachdem wir die Knoten 5–7 blau eingefärbt haben, stellen wir fest, dass der Knoten 8 nur 3 Pfeile hat, die zu blauen Knoten gehen. Übersetzt in die Positionen bedeutet das, die Position 8 kann nur in Gewinnpositionen überführt werden und ist somit eine Verlustposition.Wir färben Position 8 rot ein.

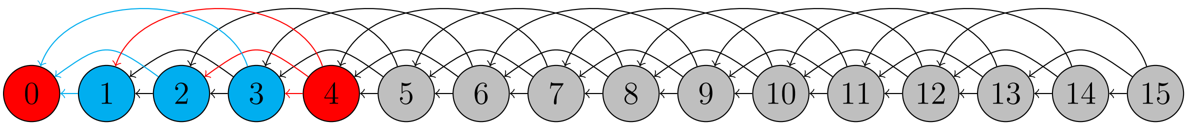


Abbildung 4: Graph des Spiels 1.1. Position 4 kann nur zu einer Gewinnposition (blau) überführt werden und ist dadurch eine Verlustposition (rot).

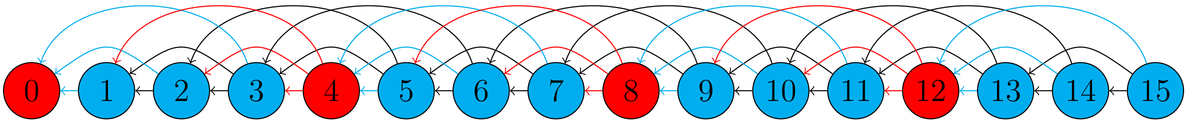


Abbildung 5: Graph des Spiels 1.1. Alle Knoten eingefärbt.

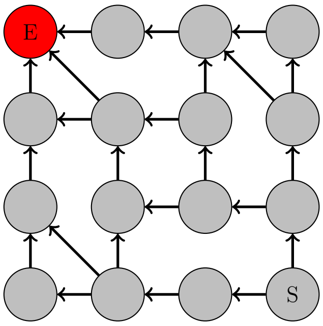


Abbildung 6: Die Markierung für Start- und Endknoten genügen, um das Spiel spielen.

Lemma 2.5 (Verlustpositionen)**.** *Alle Knoten, die keinen Pfeil auf einen roten Knoten (Verlustposition) haben, sind rot (Verlustpositionen).*

Mit dieser Konstruktionsvorgehen können wir alle Knoten einfärben. (Abbildung 5)

Mit dieser Färbung kann man das Spiel auf dem Graphen perfekt nachspielen. Ist der aktuelle Knoten blau, sollte man auf einen roten Knoten ziehen. Wenn man auf einem roten Knoten ist, so kann man nur auf einen blauen Knoten gehen. Man kann nur hoffen, dem Gegenüber passiert ein Fehler. Doch mit dem eingefärbten Graphen wird es für diese Partei ein Leichtes sein, immer auf einen roten Knoten zu gehen. Man endet am Schluss auf einem roten Knoten — beim Beispiel „Nim-Spiel, eine Reihe“ ist dies die Null — und hat gewonnen.

2.3 Graph ohne Spielanweisung

Man kann tatsächlich Spiele nur mit dem Graphen alleine spielen. Wir brauchen einen gerichteten, zusammenhängenden und zyklusfreien Graphen. Darin gibt es Knoten, die keine Nachfolger haben, diese heissen Endknoten. Diese Endknoten sind Gewinn- oder Verlustpositionen, abhängig davon, wer in dieser Position gewinnt oder verliert. Ausserdem brauchen wir einen Startknoten. Mit diesen Informationen kann man das Spiel spielen.

Spiel 2.1 (4×4)**.** *Bei Abbildung 6 ist ein Graph dargestellt. Der Startknoten ist mit* S *markiert. Wer auf den roten Knoten* E *ziehen kann, hat gewonnen.*

Auch im Spiel 2.1 kann man die Knoten einfärben und somit jede Spielposition als eine Gewinn- oder Verlustposition identifizieren. Wir benützen dabei die Lemmata 2.4 und 2.5

Definition 2.6 (Einfärben eines Graphen)**.** *Um einen Graphen einzufärben, müssen die Endknoten dem Spiel entsprechend rot oder blau sein. Anschliessend geht man wie folgt vor:*

1. *Alle Knoten, welche* ***einen*** *roten, direkten Nachfolger haben, werden blau gefärbt (Gewinnpositionen).*

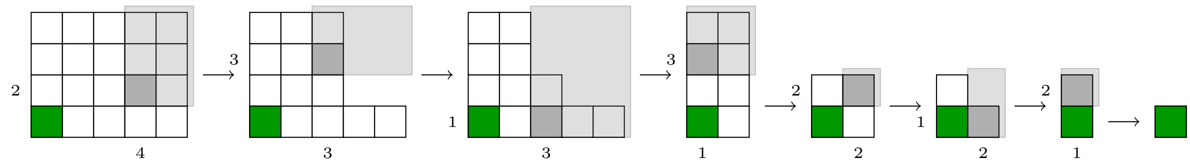


Abbildung 7: Möglicher Spielverlauf von Chomp mit einem 5×4 Brett.

2. *Alle Knoten, welche **keinen** roten, direkten Nachfolger haben, werden rot gefärbt (Verlustpositionen).*

Man kann die Regeln abwechslungsweise anwenden und jeweils so viele Knoten wie möglich einfärben, bis das ganze Spielfeld eingefärbt ist.

Man wird feststellen, dass die Startposition aus der Spiel 2.1 eine Gewinnposition ist. Wer beginnt, kann gewinnen.

Der komplett eingefärbte Graph und somit die Lösung des Spiels 2.1 ist im Anhang A.1 dargestellt.

3 Chomp (klassisch)

Nun kommen wir zum eigentlichen Spiel dieser Arbeit. Die Beschreibung stammt aus einer Präsentation von Dr. Regula Krapf [2] und wurde leicht angepasst.

Spiel 3.1 (Chomp)**.** *Beim Spiel* Chomp *ist ein rechteckiges Spielbrett gegeben. Ein Spielzug besteht darin, ein Feld auszuwählen und dieses sowie alle anderen Felder, die sich darüber oder rechts davon befinden, zu entfernen. Wer das Feld links unten entfernt, verliert.*

Ein Spielverlauf kann beispielsweise wie in Abbildung 7 aussehen.

Dieses Spiel kann gut mit einer Schokoladentafel gespielt werden. Deshalb trägt diese Arbeit den Arbeitstitel: *Nim-Schoggi*.

3.1 Positionen in Chomp

In den vorherigen Nim-Spielen lernten wir die Positionen zu kategorisieren. Diese Strategie wenden wir in Chomp auch an.

Definition 3.1 (Chomp-Position)**.** *In Chomp ist eine Spielposition das Brett mit den übrig gebliebenen Feldern. Jedes Feld darf im Spielzug ausgewählt werden. Somit repräsentiert jedes Feld einen möglichen Spielzug.*

Entscheidet man sich für das grüne Feld ganz unten links, so hat man das Spiel verloren.

Wir können Koordinaten für die Felder einführen. Das Feld ganz unten links hat die Koordinaten (1,1). Wir färben es grün ein. Dann wurden beim Spielverlauf aus der Abbildung 7 die Felder in dieser Reihenfolge ausgewählt:

1. (4,2)
2. (3,3)

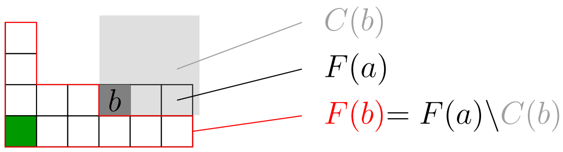


Abbildung 8: In jedem Spielzug b nimmt man die Chompmenge $C(b)$ weg.

3. (3,1)
4. (1,3)
5. (2,2)
6. (2,1)
7. (1,2) und mit
8. (1,1) hat man verloren.

Definition 3.2 (Spielzug). *Für die Variablen für einen Spielzug wählen wir kleine Buchstaben. Der Spielzug beschreiben wir mit den Koordinaten des ausgewählten Punktes.*

Definition 3.3 (Feldermenge). *Für eine Position A bezeichnen wir $F(A) \subset \mathbb{N}^2$ die Menge der Felder der Position A.*

Definition 3.4 (Chomp-Menge). *Wir nennen die Menge von Felder, die von einem Spielzug $a = (x_a, y_a)$ entfernt werden*

$$C(a) := \{(x, y) \mid x \geq x_a \wedge y \geq y_a\}.$$

Bemerkung 3.5. *Sei A eine Position. Mit dem Spielzug b kommt man zur Position B. Dann gilt:*

$$F(A) \setminus C(b) = F(B).$$

Bemerkung 3.6. *Man beachte, wenn ein Feld entfernt wird, so werden alle Felder rechts und oberhalb von diesem Feld auch entfernt. Daraus folgen folgende Aussagen:*

1. *Eine Position kann als eine Aneinanderreihung von Zeilen betrachten werden.*
2. *Die Länge der Zeilen nimmt von unten nach oben monoton ab.*
3. *Eine Position kann man als eine Liste absteigender natürlicher Zahlen kodieren. Jede Zahl steht für die Länge der Zeile. Diese Zuordnung ist bijektiv.*

Definition 3.7 (Listendarstellung einer Position). *Die Listendarstellung der Position A ist $[p_1, p_2, \ldots, p_n]$, wobei $n = \max\{y \mid (x, y) \in F(A)\}$ und $p_i = |\{(x, i) \in F(A)\}|$.*

Beispiel 3.8 (Listendarstellung einer Position). Die Kodierung der Startposition in Abbildung 7 ist $[5, 5, 5, 5]$ und geht dann über in die Position $[5, 3, 3, 3]$.

Die Position $[5, 3, 3, 3]$ ist in Abbildung 9 dargestellt. In dieser Grafik sind Lücken zwischen den Zeilen, um diese besser darzustellen. ○

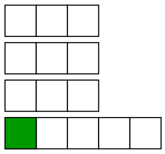


Abbildung 9: Diese Position beschrieben wir als $[5, 3, 3, 3]$.

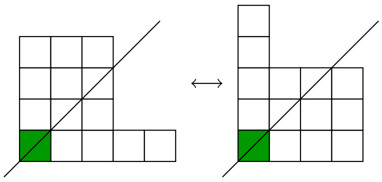


Abbildung 10: $[5, 3, 3, 3]$ wird gespiegelt zu $[4, 4, 4, 1, 1]$

Definition 3.9 (Spiegelung einer Spielposition)**.** *Die Spiegelung der Position A nennen wir A^t ist definiert durch $F(A^t) = \{(y, x) \mid (x, y) \in F(A)\}$.*

Die gespiegelte Position zur Position $[p_1, ..., p_n]$ hat die Länge $m = p_1$ und die Komponenten $k_1, ..., k_m$ mit

$$k_j := |\{i \in [1, n] \mid j \leq p_i\}|.$$

Die Bezeichnung dazu lautet: $[k_1, ..., k_m] = [p_1, ..., p_n]^t$.

Bemerkung 3.10. *Die Spiegelung entspricht der geometrischen Achsenspiegelung an der $x = y$-Achse .*

Beispiel 3.11 (Spiegelung des Graphen in Abbildung 10)**.** $[5, 3, 3, 3]^t$ hat die Länge $m = 5$.

Die Komponenten erhalten die Werte

$$\begin{aligned}
k_1 &= |\{i \in [1, n] \mid 1 \leq p_i\}| = |\{p_1, p_2, p_3, p_4\}| = 4 \\
k_2 &= |\{i \in [1, n] \mid 2 \leq p_i\}| = |\{p_1, p_2, p_3, p_4\}| = 4 \\
k_3 &= |\{i \in [1, n] \mid 3 \leq p_i\}| = |\{p_1, p_2, p_3, p_4\}| = 4 \\
k_4 &= |\{i \in [1, n] \mid 4 \leq p_i\}| = |\{p_1\}| = 1 \\
k_5 &= |\{i \in [1, n] \mid 5 \leq p_i\}| = |\{p_1\}| = 1.
\end{aligned}$$

Somit entspricht $[5, 3, 3, 3]^t$ der Position $[4, 4, 4, 1, 1]$. ○

Satz 3.12 (Spiegelungssatz)**.** *Sei G der eingefärbte Graph der Spielpositionen von Chomp, dann indiziert die Spiegelung $\circ^t$ einen Automorphismus des Graphen, der die Einfärbung respektiert.*

Definition 3.13 (Spielzug spiegeln)**.** *Gespiegelte Spielzug zu $a(x, y)$ ist $(x, y)^t = (y, x)$.*

Die Wirkung eines Spielzugs wird mit der Chomp-Menge beschrieben, die eine ähnliche Symmetrieeigenschaft hat. $C(a^t)$ entspricht $C(a)^t$, wobei C^t für $C \subset \mathbb{N}^2$ definiert ist durch

$$C^t := \{(y, x) \mid (x, y) \in C\}. \tag{1}$$

Bemerkung 3.14. *In höheren Dimensionen nehmen die Spiegelungen eine andere Form an. Wir werden über eine „Vertauschung der Dimensionen“ sprechen. (Satz 4.3)*

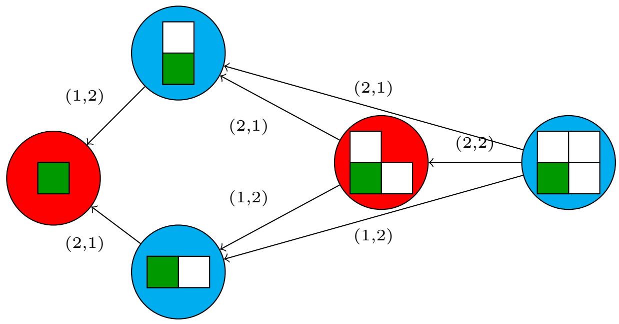


Abbildung 11: Alle möglichen Spielzüge bei einem Chomp 2×2 Spiel

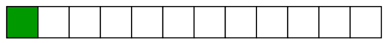


Abbildung 12: $[n]$ ist für $n > 1$ eine Gewinnposition.

3.2 Positionen von 2×2 Chomp

Bei einem 2×2 Chomp gibt es nur wenige Positionen:

- [2,2] Startposition
- [2,1]
- [2]
- [1,1]
- [1]

Mit nur so wenigen Positionen ist der Graph des Spiels sehr übersichtlich, wie in Abbildung 11 dargestellt.

3.3 Aussagen über Positionen mit einfachem Muster

Es gibt Positionen, welche einem leicht erkennbaren Muster entsprechen. In den folgenden Abschnitten werden jeweils Positionen nach einem Muster beschrieben und gleich bewiesen, ob sie eine Gewinnposition oder eine Verlustposition sind.

3.3.1 I-Position

Definition 3.15 (I-Position)**.** *Positionen von der Form* $[n]$ *oder* $[n]^t = [1, 1, ...1]$ *heissen* I-Positionen*.*

Wir kennen die Position $[1]$ und $[2]$ respektive $[1, 1]$ vom Kapitel 3.2.

Lemma 3.16. $[1]$ *ist die einzige Verlustposition. Alle anderen I-Positionen sind Gewinnposition.*

Proof. $[1]$ ist eine Verlustposition. Die Position $[n]$ mit $n > 1$ (dargestellt in Abbildung 12) kann man mit dem Spielzug (2,1) zur Verlustposition $[1]$ verändern. Dadurch sind die Positionen $[n]$ mit $n > 1$ Gewinnpositionen.

Für Positionen mit vielen Zeilen mit genau einem Element kann man das gespiegelt auch zeigen. Der Spielzug $(1, 2)$ führt zur Position $[1]$. □

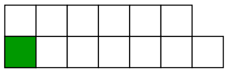


Abbildung 13: Die Treppe ist eine Verlustposition.

3.3.2 Treppe-Position

Definition 3.17 (Treppe-Position)**.** *Positionen in der Form* $[n, n-1]$ *mit* $n > 0$ *— wie in Abbildung 13 — nennen wir* Treppen-Positionen *mit Länge* n*.*

Bemerkung 3.18. $[2, 2, ..., 2, 1]$ *ist auch eine Treppe-Position, welche man man der Spiegelung (Satz 3.12) als* $[n, n-1]^t$ *beschreiben kann. Den Beweis führen wir mit einer* $[n, n-1]$ *Treppe. Mit dem Spiegelungssatz 3.12 können wir die Aussage auf* $[n, n-1]^t$ *übertragen, also auf* $[2, 2, ..., 2, 1]$*.*

Lemma 3.19. *Treppen-Positionen sind Verlustpositionen.*

Proof. Wir kennen die Position $[1]$ und $[2, 1]$ vom Kapitel 3.2. Beide Positionen sind jeweils Verlustpositionen.

Durch Induktion zeigen wir, dass alle Treppen in der Form $[n, n-1]$ mit $n \geq 0$ — wie in Abbildung 13 — Verlustpositionen sind. Wir haben gleich zwei Beispiele als Verankerung: $[2, 1]$ und $[1]$.

Wir stellen die Induktionsannahme auf, dass alle Treppen bis und mit $[n_0, n_0 - 1]$ Verlustpositionen sind.

- Aus der Treppenstufe kann man aus der oberen Zeile ein Feld auswählen. Dann wird die Position zu $[n_0, k]$ mit $k < n_0 - 1$. Dann kann man im nächsten Zug die Position $[k + 1, k]$ erstellen, was eine Treppe und per Annahme eine Verlustposition ist.
- Oder man kann ein Feld aus der unteren Zeile auswählen. So entsteht die Position $[k, k]$. Falls die Person das Feld (1,1) gewählt hat, hat sie bereits verloren. Wir können davon ausgehen, dass $1 \leq k < n_0$. Als nächste Position kann man mit dem Spielzug $(k, 2)$ auf $[k, k-1]$ kommen, was wieder per Induktionsannahme eine Verlustposition ist.

Egal welche Position man von $[n_0, n_0 - 1]$ wählt, im nächsten Zug kann man das Spiel in eine Verlustposition überführen. Deshalb sind die Treppen Verlustpositionen. In Abbildung 14 sind zwei Möglichkeiten dargestellt. □

3.3.3 L-Position

Definition 3.20 (L-Position)**.** *Positionen von der Form* $[n, 1, 1, ...1, 1]$ *mit* $n \geq 1$ *heissen* L-Positionen*. Die Figuren haben zwei Äste. Die Länge der Äste sind* n *und die Anzahl Zeilen.*

Falls die Längen der Äste gleich gross sind, heisst die Position symmetrische L-Position*. Für die symmetrische L-Position* A *gilt dann auch* $A^t = A$*.*

Lemma 3.21. *Symmetrische L-Positionen sind Verlustpositionen. Alle anderen L-Positionen, also die asymmetrischen, sind Gewinnposition.*

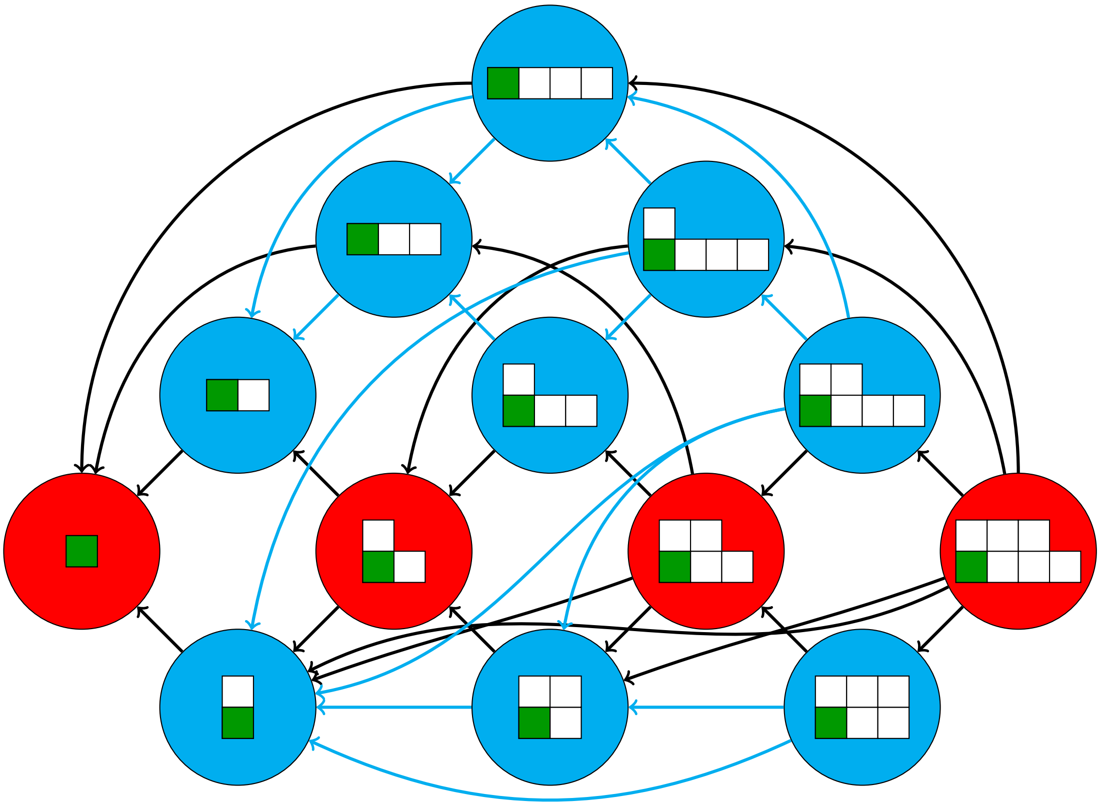


Abbildung 14: Egal ob die Gegenpartei von der oberen oder der unteren Zeile der Treppe ein Feld auswählt, man kann wieder eine Treppe erstellen.

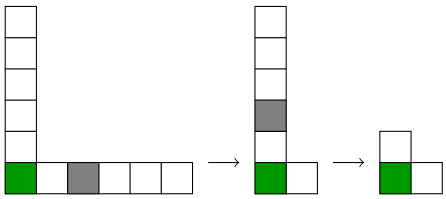


Abbildung 15: Egal aus welchem Ast die Gegenpartei ein Feld auswählt, man kann wieder eine symmetrische L Position erstellen.

Proof. Wir wissen bereits, dass [1] und $[2,1]$ Verlustpositionen sind. [2] und $[1,1]$ sind Gewinnpositionen.

Per Induktion zeigen wir zuerst, dass die *symmetrischen L-Positionen* Verlustpositionen sind. Seien alle symmetrische L-Positionen mit Astlänge kleiner gleich n Verlustpositionen. Dann kann man aus der symmetrischen L-Position mit den Astlänge $n+1$ entweder den Zug $(1,1)$ machen und alle Felder entfernen und somit verlieren, oder einen Ast kürzen. Wenn dieser Ast nur noch $k, k \leq n$, lang ist, so kann man im nächsten Zug auch den zweiten Ast auf k reduzieren. Wir sind in einer symmetrischen L-Position mit $k \leq n$, was per Annahme eine Verlustposition ist. Somit sind alle symmetrische L-Positionen Verlustpositionen.

Die L-Positionen, welche nicht symmetrisch sind, kann man in einem Zug den längeren Ast auf die selbe Länge kürzen. Das ist eine Verlustposition. Somit sind alle asymmetrischen Positionen Gewinnpositionen. □

In Abbildung 15 sind zwei Züge mit der L-Position abgebildet.

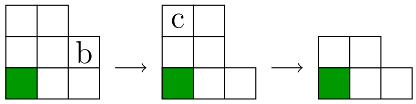


Abbildung 16: Position A, B und C aus Beispiel 3.22

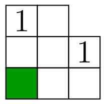


Abbildung 17: Position A mit Markierungen aus Beispiel 3.22

3.4 Eine Position analysieren

Nun da wir die Positionen definiert und einige bereits klassifiziert haben, analysieren wir andere Positionen. Wir werden dabei eine Vorgehensweise entwickeln, bei der wir einzelnen Felder markieren.

Beispiel 3.22 (Erste Analyse einer Position)**.** Um die Position zu analysieren picken wir irgend einen von den möglichen Spielzügen. In diesem Beispiel nehmen wir die Position $A[3, 3, 2]$.

Wir beginnen mit Spielzug $b(3, 2)$.

Nach dem Spielzug b haben wir die Position $B[3, 2, 2]$. Wir suchen einen Spielzug c, sodass die Position danach eine Verlustposition ist.

Wir finden tatsächlich einen Spielzug $c(1, 3)$. Die Position $C[3, 2]$ ist eine Treppe- und somit eine Verlustposition.

Weil C eine Verlustposition ist, folgt daraus, dass B eine Gewinnposition ist. Somit verlieren wir, wenn wir b spielen.

Wenn wir allgemein eine Position A analysieren, gehen wir jeden möglichen Spielzug b, respektive jedes Feld durch. Wir fragen uns jeweils, ob die neue Position B eine Gewinn- oder Verlustposition ist. Falls B eine Gewinnposition ist, gibt es mindestens einen Spielzug c zur Position C, sodass C eine Verlustposition ist. Finden wir Spielzüge b und c, so markieren wir beide repräsentierenden Felder für den Spielzug b und c mit der gleichen Zahl. In Lemma 3.24 werden wir zeigen, weshalb wir b und c bei der Markierung nicht unterscheiden müssen. In Abbildung 17 sind die Felder für Spielzug b und c mit einem gleichen „Symbol“ markiert.

Zahlen eignen sich gut als Symbole. Wir nehmen für unser Beispiel die Zahl 1. In späteren Beispielen nummerieren wir die x-Achse wenn möglich durch. Das kann einen Überblick geben, ist aber für die Theorie nicht relevant.

Die Markierungen sind Hinweise für eine perfekte Strategie. Wenn die Gegenpartei ein Feld mit einer Markierung auswählt, suchen wir das Feld mit der selben Markierung und können so der Gegenpartei wieder eine Verlustposition übergeben.

Es könnten mehrere Spielzüge zu einer Verlustposition führen. Es genügt jedoch einen Lösungsweg bzw. Spielzug zu finden. Im Folgenden werden Analysen vorkommen, dort sind in einem Feld mehrere Markierungen. Dann haben wir bereits mehrere Lösungswege gefunden.

Definition 3.23 (kommutative Spielzüge)**.** *Wir nennen zwei Spielzüge b und c* kommutativ*, wenn die Position nach b und c die gleiche Position ist, wie nach c und dann b.*

Lemma 3.24 (Kommutativität oder Verlustposition)**.** *Wenn zwei Spielzüge b und c nacheinander gespielt zu einer Verlustposition führt, dann sind die Spielzüge kommutativ oder c führt direkt zur Verlustposition.*

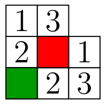


Abbildung 18: Position $[3, 3, 2]$ vollständig analysiert. Es ist eine Gewinnposition.

Proof. Wir untersuchen, was passiert, wenn die Spielzüge nicht kommutativ sind. Wenn wir zeigen können, dass ein Spielzug direkt zur Verlustposition C führt, dann ist das Lemma bewiesen.

1. Wann sind die Spielzüge kommutativ? Die Chomp-Mengen (siehe Definition 3.4) für Spielzug b und c vereint entsprechen:

$$C(b) \cup C(c) = \{(x, y) \mid (x \geq x_b \wedge y \geq y_b) \vee (x \geq x_c \wedge y \geq y_c)\}. \tag{2}$$

   Da die *Vereinigung* als Operation kommutativ ist, folgt auch die Kommutativität der Spielzüge, wenn c nach b gespielt werden kann. $C(b) \cup C(c) = C(c) \cup C(b)$.

2. Was ist, falls Spielzug b nach Spielzug c nicht mehr gespielt werden kann? Wenn (x_b, y_b) nach c nicht mehr auf dem Feld ist, dann muss das Feld, welches den Spielzug repräsentiert schon entfernt worden sein. $(x_b, y_b) \in C(c) \rightarrow x_b \geq x_c \wedge y_b \geq y_c$. Doch mit diesen Feststellungen kann man die Menge $C(b) \cup C(c)$ vereinfachen, da man für jedes $(x, y) \in C(b)$ zeigen kann, dass es auch in $C(c)$ liegt. Für jedes Feld (x, y) welches in $C(b) \cup C(c)$ liegt gelten folgende boolesche Aussagen:

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in C(b) &\Leftrightarrow (x \geq x_b \geq x_c) \wedge (y \geq y_b \geq y_c) && (3)\\ &\Rightarrow (x \geq x_c) \wedge (y \geq y_c) && (4)\\ &\Rightarrow (x, y) \in C(c). && (5) \end{aligned}$$

   Somit gilt $C(b) \subseteq C(c)$ und $C(b) \cup C(c) = C(c)$. Die Felder, welche durch den Spielzug b entfernt werden, verschwinden auch durch den Spielzug c. Somit kommt man mit dem Spielzug c von Spielposition A direkt zur Position C. Da Position C eine Verlustposition ist, folgt, dass wir von A direkt mit Spielzug c zu einer Verlustposition kommen.

Zusammengefasst können wir nun sagen: Wenn $(x_b, y_b) \notin C(c)$, dann sind b und c kommutativ. Falls $(x_b, y_b) \in C(c)$, dann kommt man von A durch c direkt nach C. □

3.4.1 Markierungen

Mit dieser neuen Erkenntnis aus Lemma 3.24 suchen wir die Paarungen der Spielzüge, welche zu einer Verlustposition führen. Wir markieren die entsprechenden Felder mit der selben Zahl. Falls ein Spielzug direkt zu einer Verlustposition führt, markieren wir die Position rot, da Rot die Farbe für die Verlustposition ist. Das Feld unten links lassen wir weiterhin grün.

Wenn alle Felder mit mindestens einer Zahl markiert sind, bedeutet dies, dass jeder mögliche Spielzug zu einer Gewinnposition führt. Somit ist die Position eine Verlustposition. Falls mindestens ein Spielzug zu einer Verlustposition führt, so ist die Position eine Gewinnposition.

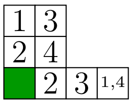


Abbildung 19: $[4, 2, 2]$ ist eine Verlustposition.

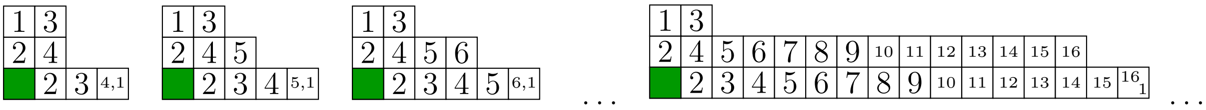


Abbildung 20: $[4, 2, 2]$ ist eine Verlustposition, sowie $[n + 4, n + 2, 2]$ für $n \geq 0$. Wir bezeichnen diese Positionen als 2n2 Treppe.

3.5 Weitere Verlustpositionen

Durch Ausprobieren stellt man fest, dass jede Position von einem 3×3 Spiel zu einer bekannten Verlustposition geführt werden kann oder die Position ist bereits eine bekannte Verlustposition.

Das Spiel wird immer komplexer, je grösser die Fläche wird. Wir werden Schritt für Schritt die Spielfäche vergrössern, bis wir zum 6×4 Feld kommen werden. Diese Grösse entspricht der Schokoladetafel vom Titelbild.

Wir suchen neue Verlustpositionen, welche im Spiel mit einem Spielfeld 4×3 vorkommen können. In Abbildung 19 haben wir eine Verlustposition gefunden.

3.5.1 Mehrere Markierungen in einem Feld

Was in Abbildung 19 auffällt, sind zwei Ziffern im Feld (4,1). Wenn ein Feld mit mehreren Ziffern markiert ist, so bedeutet dies, dass es mehrere Spielzüge gibt, welche wieder zu einer Verlustposition führen können.

In unserem Beispiel, wenn die Gegenpartei den Spielzug $b(4, 1)$ zieht, dann gibt es zwei mögliche Spielzüge, um eine Verlustposition zu erlagen. Diese sind mit 1 und 4 markiert.

1: Mit $b(1, 3)$ gibt es eine Treppenposition.

4: Mit $c(2, 2)$ gibt es eine symmetrische L-Position.

3.5.2 2n2 Treppe

Nach der Verlustposition $[4, 2, 2]$ findet man durch die Analyse $[5, 3, 2]$. Es stellt sich heraus, dass Positionen von der Form $[n + 4, n + 2, 2]$ Verlustpositionen sind.

Satz 3.25 (2n2 Treppe)**.** *Für alle $n \geq 0$ ist $[n + 4, n + 2, 2]$ eine Verlustposition. Wir nennen diese Positionen* 2n2 Treppe.

Beispiele für die 2n2 Treppe Positionen befinden sich in der Abbildung 20.

Proof. Als Beweis genügt es die Analyse durch zu führen. Für $n \in \{0, 1, 2, 12\}$ sind die Beweise in der Abbildung 20. Für $n > 2$ machen wir eine Analyse in Abbildung 21. Diese Analyse zeigt uns, dass die 2n2 Treppe Position eine Verlustposition ist. □

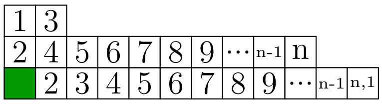
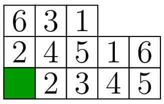
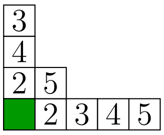


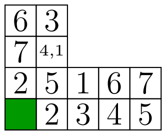
Abbildung 21: Diese Analyse beweist, dass die 2n2 Treppe Position eine Verlustposition ist.



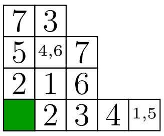
(i) $[5, 5, 3]$



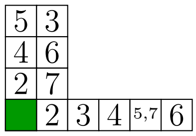
(ii) $[5, 2, 1, 1]$



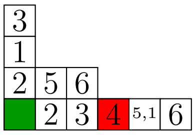
(iii) $[5, 5, 2, 2]$



(iv) $[5, 3, 3, 2]$



(v) $[6, 2, 2, 2]$



(vi) $[6, 3, 1, 1]$ — die Position vom Titelbild — ist keine Verlustposition. Nach dem Spielzug $(4, 1)$ wird die Position zu einer Verlustposition.

Abbildung 22: Sammlung Verlustpositionen des 6×4 Spieles. Abbildung 22vi ist eine Gewinnposition.

3.5.3 Die Strategie für das 6×4 Feld

Die Schokoladentafel auf dem Titelbild Beim Spiel auf einem 6×4 Brett kommen gleich drei neue Verlustpositionen hinzu.

Für eine weitere Spalte auf dem Feld gibt es eine weitere Verlustposition: Abbildung 22v.

Mit den gesammelten Verlustpositionen kann man das Chomp mit einem 6×4 Spielbrett gewinnen. Mit dem Spielzug $a(3, 2)$ übergeben wir die Verlustposition $[6, 2, 2, 2]$. Die Gegenpartei muss einen Zug machen und ein Feld auswählen. Gemäss der Analyse in Abbildung 22v können wir den geeigneten Spielzug spielen, damit die Gegenpartei wieder in einer Verlustposition ist. Machen wir keinen Fehler, können wir so gewinnen!

3.6 Gewinnstrategie

Wenn wir diese Verlustpositionen mit den Markierungen kennen, können wir Chomp-Spiel sicher gewinnen.

Wir kennen die Verlustpositionen vom 6×4 Spielfeld und wissen, dass wir von der Startposition $[6, 6, 6, 6]$ mit dem Spielzug $(3, 2)$ zur Verlustposition $[6, 2, 2, 2]$ kommen. Wir beobachten welches Feld von der Gegenpartei ausgewählt wird. Wir suchen in der analysierten Verlustposition die passende Markierung. Wählen wir diesen Spielzug aus, dann bekommt die Gegenpartei wieder eine Verlustposition. Dies können wir wiederholen, und der Gegenpartei immer wieder eine Verlustposition geben, bis wir gewonnen haben. Wenn wir beginnen, können wir mit absoluter Sicherheit gewinnen.

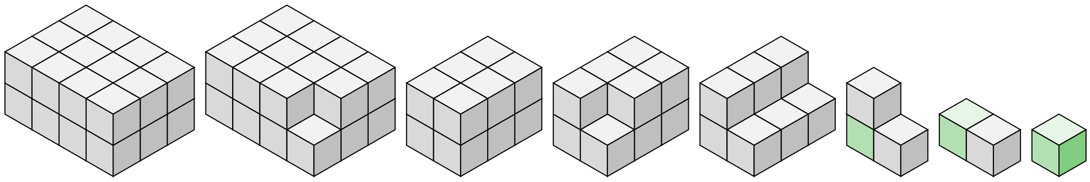


Abbildung 23: Ein Beispiel von einem 3D Chomp Spiel.

Beispiel 3.26 (6×4)**.** Ein Spielverlauf könnte so aussehen:

- Wir beginnen mit dem Spielzug $(3, 2)$ und geben der Gegenpartei die Verlustposition $[6, 2, 2, 2]$ kommen. Diese Position haben wir in der Abbildung 22v analysiert.
- Die Gegenpartei wählt $(6, 1)$ als Spielzug aus.
- Wir sehen auf dem Feld $(6, 1)$ ist die Markierung 6. Die andere Markierung 6 ist auf dem Feld $(2, 3)$.
- Die neue Verlustposition für die Gegenpartei ist $[5, 2, 1, 1]$. (Analysiert in Abbildung 22ii)
- Die Gegenpartei wählt $(4, 1)$ als Spielzug aus.
- Wir sehen auf dem Feld $(4, 1)$ ist die Markierung 4. Die andere Markierung 4 ist auf dem Feld $(1, 3)$.
- Die neue Verlustposition für die Gegenpartei ist $[3, 2]$. Das ist eine Treppe-Position.
- Die Gegenpartei wählt den Spielzug $(1, 2)$ aus.
- Die wir spielen den Spielzug $(2, 1)$.
- Die Gegenpartei bekommt die Position $[1]$ und muss das letzte Feld nehmen.
- Wir gewinnen. ○

Für grössere Spielfelder müssten wir weitere Positionen analysieren. Der Aufwand wird immer grösser, weshalb wir bei der Grösse einer Schokoladentafel aufhören — jedenfalls für die zweidimensionale Version des Spiels.

4 Chomp 3D

Man könnte noch lange weiter nach Verlustpositionen suchen. Doch wir erweitern das Chomp-Spiel 3.1. Anstatt eines rechteckigen Spielbretts wählen wir einen Quader als „Spielbrett“.

Spiel 4.1 (Chomp 3D)**.** *Das Spielbrett ist ein Quader, welcher aus mehreren Würfeln besteht. Ein Spielzug besteht darin, einen Würfel auszuwählen und diesen sowie alle anderen Würfel, die sich darüber, rechts davon oder davor befinden, zu entfernen. Wer den Würfel hinten links unten entfernt, verliert.*

In Abbildung 23 wir mit einem $3 \times 4 \times 2$ Quader gespielt.

4.1 Notation

Wir benötigen nun eine Notation für die 3D Positionen und für die Spielzüge.

Definition 4.1 (3D Koordinaten)**.** *Der Würfel, welcher hinten links unten ist, hat die Koordinaten* $(1, 1, 1)$*. Die Achsen sind so zu legen, dass die Würfel jeweils in positiver Richtung liegen.*

Da die Dimensionen beliebig kodiert werden können, kann man Positionen nicht nur spiegeln, sondern auch um die Achse $x = y = z$ drehen. Tatsächlich kann man die Dimensionen mit der symmetrischen Gruppe S_3 transformieren. Wir brauchen dazu eine Permutation $p \in S_3$.

Definition 4.2 (Vertauschung der Dimensionen)**.** *Die* Vertauschung der Dimensionen *der Position* A *mit einer Permutation* p *nennen wir* A^p *ist definiert durch* $F(A^p) = \{(a_{p(1)}, a_{p(2)}, a_{p(3)}) \mid (a_1, a_2, a_3) \in F(A)\}$.

Satz 4.3 (Vertauschung der Dimnesionen)**.** *Sei* G *der eingefärbte Graph der Spielpositionen von Chomp 3D und* $p \in S_3$ *dann indiziert die Spiegelung* $\circ^p$ *einen Automorphismus des Graphen, der die Einfärbung respektiert.*

Bemerkung 4.4. *Die Vertauschungen der Dimensionen bilden eine Illustration der symmetrischen Gruppe, denn für eine Position kann man die Algebra der symmetrischen Gruppe anwenden.*

Definition 4.5 (Spielzug)**.** *Einen Spielzug definieren wir durch die Auswahl von einem Würfel. Dieser Würfel können wir mit den Koordinaten eindeutig beschreiben.*

Im Beispiel von aus der Abbildung 23 sind die Spielzüge:

1. $a(3, 4, 2)$
2. $b(1, 3, 1)$
3. $c(3, 2, 2)$
4. $d(1, 2, 2)$
5. $e(2, 1, 1)$
6. $f(1, 1, 2)$
7. $g(1, 2, 1)$
8. $h(1, 1, 1)$

Nun möchten wir Wissen vom 2D Spiel ins 3D integrieren.

Bemerkung 4.6. *Wenn die Position* flach *ist, dh. in einer Dimension haben alle Würfel den Wert 1, dann kann man das Spiel um diese Position „kürzen“. Aus einer 3D Position kann eine 2D Position gemacht werden. Die Verlust- und Gewinnpositionen bleiben dabei erhalten.*

Beispiel 4.7. Die Position $[6, 2, 2, 2]$ entspricht der linken Figur in der Abbildung 24. Sie ist dort eine flache 3D Position. Rechts neben ihr ist die 2D Position davon. ○

Definition 4.8 (Notation der Positionen in 3D)**.** *Wir unterteilen die Position in der* x*-Achse und erstellen mehrere Ebenen. Diese Ebenen listen wir wieder in eckigen Klammern auf.*

Beispiel 4.9. Die Position der Abbildung 25 notieren wir als $A[[3, 3], [2], [1]]$. ○

Abbildung 24: Da die linke Position aus einem 3D Spiel „flach“ ist, kann man die Position in 2D abbilden.

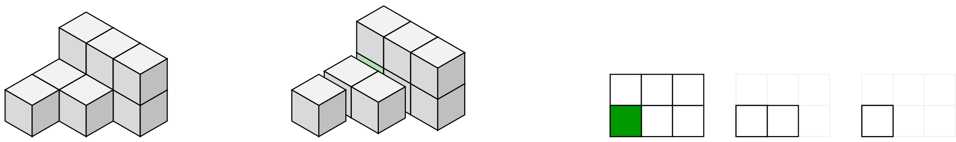


Abbildung 25: Zerlegung einer 3D Position in Ebenen. Die 3D Position notieren wir als $A[[3,3],[2],[1]]$

4.2 Verlustpositionen im Würfel

Nun suchen wir nach den Verlustpositionen im Würfel mit Kantenlänge 2.

Aus dem 2D Spiel können wir zwei Verlustpositionen übernehmen: $[1]$ und $[2,1]$. In Abbildung 26 werden alle diese Verlustpositionen in 3D dargestellt.

Um eine 3D Position zu analysieren eignet sich die Darstellung in Ebenen. So ist jeder Würfel in der Abbildung sichtbar und kann darin markiert werden.

In Abbildung 27 können wir alle bis auf einen Spielzug mit einem anderen Spielzug zu einer Verlustposition führen.

Wir analysieren nun, was nach dem Spielzug $(2,2,2)$ vorhanden ist. Das ist die Position $[[2,2],[2,1]]$. In Abbildung 28 ist die Analyse. Sie ist sehr ähnlich zur Analyse in 2D aus dem Kapitel 3.4 „Eine Position analysieren“. Für jeden Spielzug finden wir einen passenden Spielzug, um eine Verlustposition zu erlangen. Somit ist $[[2,2],[2,1]]$ eine Verlustposition. Diese Verlustposition lässt sich direkt vom Würfel erlangen. Die Gewinnstrategie beginnt also mit dem Spielzug $(2,2,2)$ und folgt anschliessend den Markierungen.

4.3 $3 \times 2 \times 2$ Quader

Nachdem die Analyse des Würfels mit Kantenlänge 2 so gut funktioniert hat, wählen wir eine grössere Startposition. Wir analysieren den $3 \times 2 \times 2$ Quader.

Bemerkung 4.10 (Nur notwenidige Positionen analysieren)**.** *Wir müssen nicht jede mögliche Position analysieren. Wenn wir einen Spielzug von der Startposition gefunden haben, welche zu einer analysierten Verlustposition führt, haben wir eine Gewinnstrategie gefunden.*

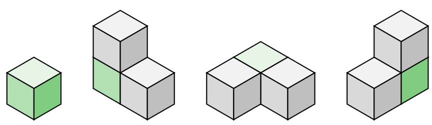


Abbildung 26: „flache“ Verlustpositionen für das 3D-Chomp aus einem Körper mit maximaler Kantenlänge 2 aus dem 2D Spiel hergeleitet.

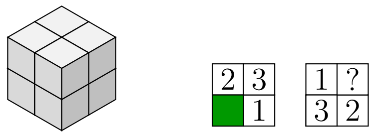


Abbildung 27: Die Analyse des Würfels lässt nur einen Spielzug ungeklärt.

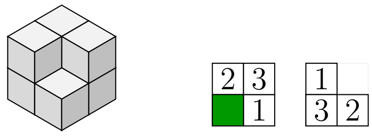


Abbildung 28: Die Analyse zeigt, dass die Position $[[2,2],[2,1]]$ eine Verlustposition ist.

Es ist wie im Graphen ein paar Knoten grau zu belassen im Wissen, dass wir so spielen können, dass keine Partei einen Spielzug zu diesen grauen Knoten wählen werden.

In Abbildung 29 analysieren wir die Startposition.

Die Spielzüge $a_1(2,1,2)$, $a_2(2,2,1)$ und $c(3,2,2)$ führen zu *unbekannten* Positionen. Also analysieren wir wiederum diese neuen Positionen. Beginnen wir gleich mit $A_1[[2,2],[2],[2]]$ und $A_2[[2,2],[1,1],[1,1]]$.

Diese Positionen sind symmetrisch zueinander. Mit der Permutation $p = (1,3,2)$ gilt $A_2^p = A_1$ Was wir für $A_2[[2,2],[1,1],[1,1]]$ herausfinden können wir für die andere Position A_1 übernehmen. Die Analyse von A_2 machen wird in Abbildung 31.

Es bleibt uns noch die Position $B[[2,2],[1],[1]]$ zu analysieren. Wie in Abbildung 32 zu sehen ist, identifizieren wir B als eine Verlustposition. Da wir von A_1 oder A_2 nach B gehen können, sind A_1 und A_2 Gewinnpositionen.

Es bleibt noch die Position $C[[2,2],[2,2],[2,1]]$ zu analysieren.

Mit der Analyse vom B kommen wir weiter und finden heraus, dass C eine Verlustposition ist. Mit diesem Wissen können wir die Analyse vom Quader und somit vom ganzen Spiel abschliessen. Die Analyse ist in Abbildung 34 dargestellt.

5 Chomp nD

Drei Dimensionen kann man sich räumlich vorstellen. Doch es gibt keinen Grund Chomp auf den vorstellbaren Raum zu beschränken. Wir schliessen diese Arbeit mit einer Gewinnstrategie für den 2^4 Würfel — also dem Hyperwürfel mit Kantenlänge 2.

Dazu brauchen wir keine neue Theorie. Lediglich mit den Analysetools können wir eine Strategie finden.

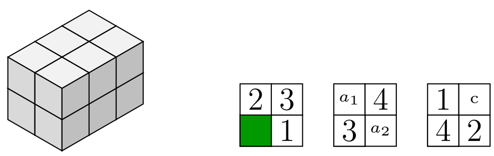


Abbildung 29: Die Position $[[2,2],[2,2],[2,2]]$ können wir noch nicht komplett analysieren. Die Buchstaben repräsentieren die Spielzüge, welche weiter analysiert werden müssen.

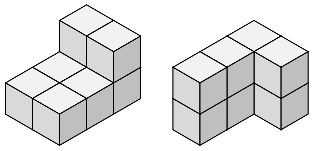


Abbildung 30: $A_1[[2,2],[2],[2]]^p = A_2[[2,2],[1,1],[1,1]]$ mit der Permutation $p = (1,3,2)$. Wenn wir die Dimensionen der Position A_1 mit der Permutation p vertauschen erhalten wir A_2.

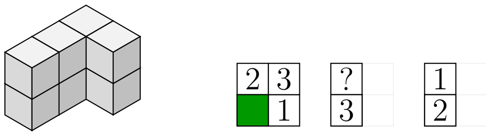


Abbildung 31: Auch die Position $A_2[[2,2],[1,1],[1,1]]$ können wir noch nicht komplett analysieren.

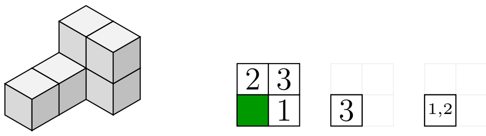


Abbildung 32: $B[[2,2],[1],[1]]$ ist eine Verlustposition.

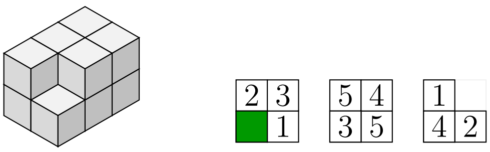


Abbildung 33: Mit dem Wissen, dass $B[[2,2],[1],[1]]$ eine Verlustposition ist, können wir die Position $C[[2,2],[2,2],[2,1]]$ abschliessend analysieren. C ist eine Verlustposition.

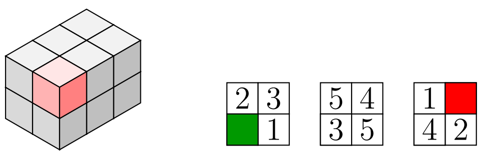


Abbildung 34: Die Position $[[2,2],[2,2],[2,2]]$ ist eine Gewinnposition. Der Spielzug $c(3,2,2)$ führt zu einer Verlustposition.

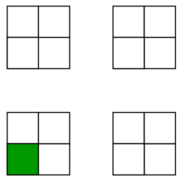


Abbildung 35: Ein 4D Würfel mit Kantenlänge 2

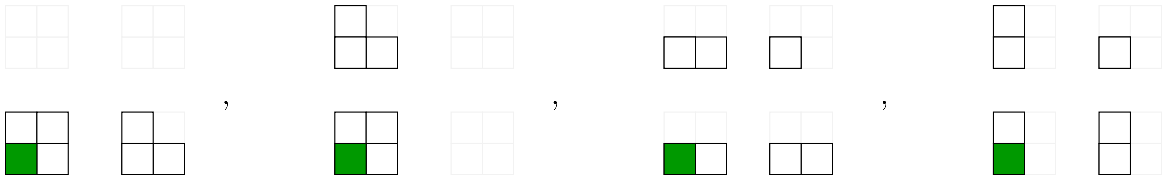


Abbildung 36: Erste Verlustpostionen in 4D. Durch das Vertauschen der Dimensionen gibt es daraus vier Verlustpositionen.

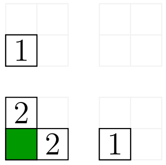
5.1 Darstellung von 4D

In der Abbildung 25 betrachteten wir eine 3D Position als eine Aneinanderreihung von 2D Figuren. Wenn man möchte, kann man diese 2D Figuren auch als Schnittebene betrachten. Wenn wir nun die 2D Figuren nicht nur nach links, sondern nach oben anreihen, haben wir eine Tabelle an 2D Figuren. Mit einer solchen Grafik können wir 4D Positionen darstellen.

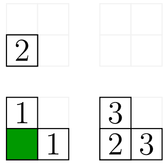
In Abbildung 35 ist der Hyperwürfel (ein 4D Würfel) abgebildet.

Jede weitere Dimension könnte man durch eine weitere Anreihung bekommen. Doch dies wird in dieser Arbeit nicht vorkommen.

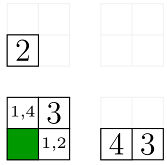
Auch hier gilt wieder, dass eine Position in 3D einer flachen Position in 4D entspricht. Die Verlustposition $[[2,2],[2,1]]$ wird in Abbildung 36 als eine *flache* 4D Verlustposition dargestellt. Es gibt vier Verlustpositionen basierend auf der Verlustposition $[[2,2],[2,1]]$.



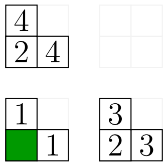
(i) Verlustposition 1



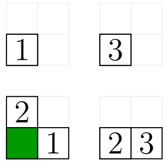
(ii) Verlustposition 2



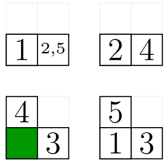
(iii) Verlustposition 3



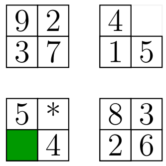
(iv) Verlustposition 4



(v) Verlustposition 5



(vi) Verlustposition 6



$* : 1, 6, 7, 8, 9$

(vii) Verlustposition 7

Abbildung 37: Einige Verlustpositionen des Hyperwürfels

5.2 Notation

Jede Dimension bedeutet eine Liste mehr. Das Konzept für die Notation können wir übernehmen.

Beispiel 5.1. Die 4D Verlustpositionen in Abbildung 36 sind:

1. $[[[2, 2], [2, 1]]]$
2. $[[[2, 2]], [[2, 1]]]$
3. $[[[1, 1], [1, 1]], [[1, 1], [1]]]$
4. $[[[2], [2]], [[2], [1]]]$ ○

5.3 Analyse des Hyperwürfels

In Abbildung 37 sind sieben Verlustpositionen ausgeführt. Diese genügen, um eine Gewinnstrategie für den Hyperwürfel zu finden. Insbesondere kann man mit der Position aus der Abbildung 37vii aus der Startposition zu einer Verlustposition kommen.

Bemerkung 5.2. *Man könnte beweisen, dass die Verlustposition 7 von Abbildung 37vii von allen direkten Nachfolgern des Hyperwürfels die einzige Verlustposition ist. Jeder andere direkte Nachfolger kann man von der Verlustposition 7 erreichen.*

6 Offene Fragen

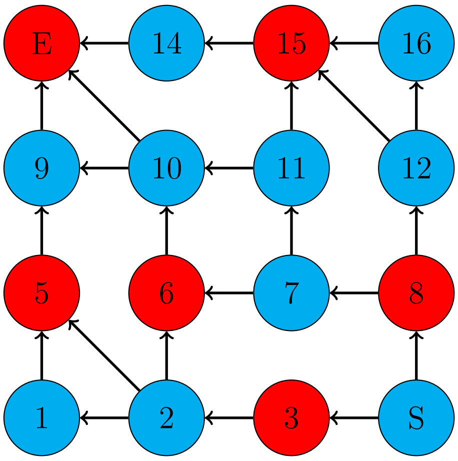
Mit dem gelösten Hyperwürfel endet diese Arbeit. Wir konnten Konzepte erarbeiten, welche man in höhere Dimensionen übernehmen kann.

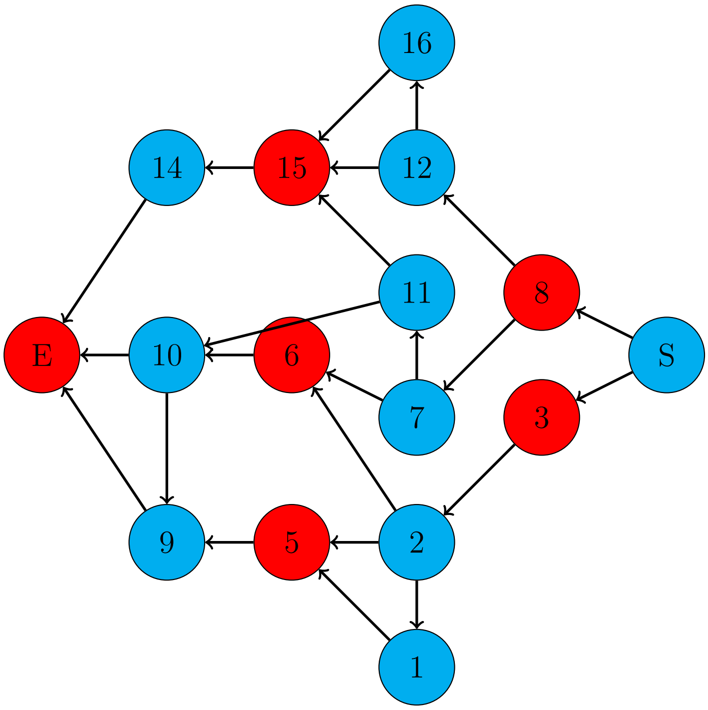
Die Arbeit wirft weitere Fragen auf, welche die Arbeit nicht beantwortet. Hier sind drei Fragen aufgelistet:

1. Wie könnte man ein Programm schreiben, um die Verlustpositionen zu suchen?
2. Was für Muster gibt es noch in Verlustpositionen? Das Programm und Verlustpositionen auf grösseren Feldern hilft sicherlich neue Muster zu erkennen.
3. Man könnte das Spiel erweitern, sodass das grüne Feld nicht am Rand liegt. Nach einer Definition werden alle Felder, die vom grünen Feld aus „hinter“ dem ausgewählten Feld liegen entfernt.

A Lösungen

A.1 Lösung des Spiels 4×4 (2.1)





Literatur

[1] Dmicha. *Chomp – Wikipedia*. 7. Sep. 2021. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Chomp.

[2] Dr. Regula Krapf. „Wer gewinnt? - Wie man mit Mathematik das Gegenüber austrickst“. In: (29. Apr. 2022). URL: https://hcm.uni-bonn.de/fileadmin/hcm/Spiele.pdf.

Abbildungsverzeichnis

1 Reihen von Streichhölzer 4
2 Graph des Spiels 1.1. Knoten 0 repräsentiert eine Verlustposition. 6
3 Graph des Spiels 1.1. Die Positionen 0–3 als Verlust- (rot) und Gewinnposition (blau) identifiziert. (Definitionen der Positionen in Kapitel 2.1) . . . 6
4 Graph des Spiels 1.1. Position 4 kann nur zu einer Gewinnposition (blau) überführt werden und ist dadurch eine Verlustposition (rot). 6
5 Graph des Spiels 1.1. Alle Knoten eingefärbt. 7
6 Die Markierung für Start- und Endknoten genügen, um das Spiel spielen. . 7
7 Möglicher Spielverlauf von Chomp mit einem 5×4 Brett. 8
8 In jedem Spielzug b nimmt man die Chompmenge $C(b)$ weg. 9
9 Diese Position beschrieben wir als $[5, 3, 3, 3]$. 10
10 $[5, 3, 3, 3]$ wird gespiegelt zu $[4, 4, 4, 1, 1]$ 10
11 Alle möglichen Spielzüge bei einem Chomp 2×2 Spiel 11
12 $[n]$ ist für $n > 1$ eine Gewinnposition. 11
13 Die Treppe ist eine Verlustposition. 12
14 Egal ob die Gegenpartei von der oberen oder der unteren Zeile der Treppe ein Feld auswählt, man kann wieder eine Treppe erstellen. 13
15 Egal aus welchem Ast die Gegenpartei ein Feld auswählt, man kann wieder eine symmetrische L Position erstellen. 13
16 Position A, B und C aus Beispiel 3.22 14
17 Position A mit Markierungen aus Beispiel 3.22 14
18 Position $[3, 3, 2]$ vollständig analysiert. Es ist eine Gewinnposition. 15
19 $[4, 2, 2]$ ist eine Verlustposition. 16
20 $[4, 2, 2]$ ist eine Verlustposition, sowie $[n + 4, n + 2, 2]$ für $n \geq 0$. Wir bezeichnen diese Positionen als 2n2 Treppe. 16
21 Diese Analyse beweist, dass die 2n2 Treppe Position eine Verlustposition ist. 17
22 Sammlung Verlustpositionen des 6×4 Spieles. Abbildung 22vi ist eine Gewinnposition. 17
23 Ein Beispiel von einem 3D Chomp Spiel. 18
24 Da die linke Position aus einem 3D Spiel „flach“ ist, kann man die Position in 2D abbilden. 20
25 Zerlegung einer 3D Position in Ebenen. Die 3D Position notieren wir als $A[[3, 3], [2], [1]]$ 20
26 „flache“ Verlustpositionen für das 3D-Chomp aus einem Körper mit maximaler Kantenlänge 2 aus dem 2D Spiel hergeleitet. 20
27 Die Analyse des Würfels lässt nur einen Spielzug ungeklärt. 21
28 Die Analyse zeigt, dass die Position $[[2, 2], [2, 1]]$ eine Verlustposition ist. . 21

29 Die Position $[[2,2],[2,2],[2,2]]$ können wir noch nicht komplett analysieren. Die Buchstaben repräsentieren die Spielzüge, welche weiter analysiert werden müssen. . . . 21
30 $A_1[[2,2],[2],[2]]^p = A_2[[2,2],[1,1],[1,1]]$ mit der Permutation $p = (1,3,2)$. Wenn wir die Dimensionen der Position A_1 mit der Permutation p vertauschen erhalten wir A_2. . . . 22
31 Auch die Position $A_2[[2,2],[1,1],[1,1]]$ können wir noch nicht komplett analysieren. . . . 22
32 $B[[2,2],[1],[1]]$ ist eine Verlustposition. . . . 22
33 Mit dem Wissen, dass $B[[2,2],[1],[1]]$ eine Verlustposition ist, können wir die Position $C[[2,2],[2,2],[2,1]]$ abschliessend analysieren. C ist eine Verlustposition. . . . 22
34 Die Position $[[2,2],[2,2],[2,2]]$ ist eine Gewinnposition. Der Spielzug $c(3,2,2)$ führt zu einer Verlustposition. . . . 22
35 Ein 4D Würfel mit Kantenlänge 2 . . . 23
36 Erste Verlustpostionen in 4D. Durch das Vertauschen der Dimensionen gibt es daraus vier Verlustpositionen. . . . 23
37 Einige Verlustpositionen des Hyperwürfels . . . 24